Revista Infancia, Educación y Aprendizaje (IEYA). Vol. 9, Nº 1, 2023, pp. 53-68
DOI: https://doi.org/10.22370/ieya.2023.9.1.3178

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

EL CUENTO INFANTIL COMO HERRAMIENTA PARA INTRODUCIR LOS CONJUNTOS BORROSOS EN LAS PRIMERAS EDADES

THE CHILDREN'S STORY AS A TOOL FOR INTRODUCING FUZZY SET AT EARLY AGES

A HISTÓRIA INFANTIL COMO FERRAMENTA PARA INTRODUZIR OS CONJUNTOS DIFUSOS-CONJUNTOS DIFUSOS NA INFÂNCIA

Queralt Viladevall[1,2], Joan Carles Ferrer-Comalat[2], Ángel Alsina[2]

[1]Universitat Oberta de Catalunya, España, qviladevall@uoc.edu
[2]Universidad de Girona, España, joancarles.ferrer@udg.edu, angel.alsina@udg.edu

Fecha de recepción: 09 de marzo de 2022
Fecha de aceptación: 21 de marzo de 2023

RESUMEN

El objetivo de este estudio es fundamentar teóricamente el uso de la lectura de cuentos como recurso para introducir el aprendizaje de la teoría de conjuntos borrosos en las aulas de infantil y primaria. Para ello, se han seleccionado una colección de cuentos que recogen en sus historias conceptos y procedimientos que permiten introducir dicha teoría en las aulas, a fin de formalizar un aprendizaje matemático que hasta la actualidad solo se ha realizado de manera informal. El resultado del análisis muestra que los cuentos presentan multitud de ejemplos de pensamiento borroso expresados en lenguaje natural, y consiguientemente, son una forma amena de introducir la borrosidad en las primeras edades, con el propósito de que en el sistema actual de enseñanza de las matemáticas la teoría de conjuntos no quede focalizada únicamente en una concepción binaria, lo cual es fuente de concepciones erróneas.

Palabras Claves: *teoría de conjuntos borrosos; formalización; educación infantil; educación primaria; cuentos*

ABSTRACT

The aim of this study is to provide a theoretical basis for the use of stories as a resource to introduce the learning of fuzzy set theory in nursery and primary school classrooms. To this end, a number of stories were selected which have concepts and procedures that allow this theory to be introduced into the classroom, the idea being to formalize mathematical learning that has previously only been carried out on an informal basis. The results of the analysis show that the stories in question present a multitude of examples of fuzzy thinking expressed in natural language, and that they are consequently an entertaining way of introducing fuzzy set theory at early ages. The goal here is that set theory not solely focus on a binary conception within the current system for teaching mathematics, since this has proven to be the source of misconceptions.

Key words: *fuzzy set theory; formalization; kindergarten; elementary education; stories.*

RESUMO
O objetivo deste estudo é fundamentar teoricamente o uso da leitura de histórias como recurso para introduzir o aprendizado da teoria dos conjuntos difusos em salas de pré-escola e ensino fundamental. Para isso, foi selecionada uma coleção de histórias que incluem os conceitos e procedimentos que permitem que essa teoria seja introduzida em sala de aula, a fim de formalizar uma aprendizagem matemática que até agora só era realizada informalmente. O resultado da análise mostra que as histórias apresentam uma infinidade de exemplos de pensamentos difusos expressos com uma linguagem natural e consequentemente, são uma forma prazerosa de introduzir a teoria dos conjuntos difusos na Infância, com o propósito de propor um ensino mais atual do sistema matemático, onde a teoria dos conjuntos não se concentre apenas em uma concepção binária, que é fonte de concepções erróneas.

Palavras chaves: *teoria dos conjuntos difusos; formalização; pré-escola; ensino fundamental; histórias.*

1.- INTRODUCCION

Todo ser cognoscente construye conjuntos. Los diferentes usos que de ellos se hace permiten encontrar un sentido a toda la información que se recibe del mundo que nos rodea. Dado lo esencial que puede ser esta habilidad para la supervivencia no debería extrañarnos que entre las primeras muestras de razonamiento que se manifiestan en las primeras edades se hallen multitud de destrezas relacionadas con la construcción de conjuntos, como por ejemplo la clasificación de objetos por una cualidad común o la conexión de objetos mediante correspondencias (Alsina, 2022; 2019a). Teniendo en cuenta que existen múltiples sugerencias para que los currículos de educación infantil se fundamenten en las habilidades naturales relacionadas con la teoría de conjuntos (Blanton y Kaput, 2005; NCTM, 2003; Kaput, 2000), y que su aprendizaje es considerado necesario según las directrices curriculares vigentes (MEFP, 2022a; 2022b), queda patente que la teoría de conjuntos puede ser considerada como una base de trabajo ideal sobre la que edificar el aprendizaje matemático en infantil y primaria.

Aunque los autores del presente trabajo están completamente de acuerdo con esta consideración, quieren matizar que también creen que dicha teoría, en algún momento de las etapas de infantil o primaria, debería ser presentada como un caso particular de la teoría de conjuntos borrosos (Zadeh, 1965), que acepta la idea de que los elementos también pueden pertenecer parcialmente a los conjuntos, resolviendo con ello graves problemas intrínsecos a la teoría de conjuntos clásica, como por ejemplo la aparición de la paradoja sorites, cuando se usa "el sentido común" sobre conceptos vagos, o la imposibilidad de clasificar una elipse casi circular en los conjuntos elipse o circunferencia (Linares et al., 2020).

Los autores asumen que, dado lo reciente de la nueva teoría, es normal que nunca se haya debatido sobre introducir su estudio formal en las aulas de infantil o primaria, pero consideran que esto debería cambiar, pues actualmente, y en determinados contextos como el producido con el movimiento de género no binario (Trujillo, 2022; Wilchins et al. 2020; Wilchins 2017), la clasificación en conjuntos ordinarios ha quedado desfasada y se deben poder mostrar otras posibilidades más ajustadas a la realidad.

Ello es coherente con el hecho de que, por ejemplo en España, el Real Decreto 157/2022 (MEFP, 2022b) se informa que es necesario preparar al alumnado para garantizar que toda persona que supere con éxito la enseñanza básica sepa activar los aprendizajes adquiridos para responder a los retos principales a los que deberá hacer frente a lo largo de su vida. Entre estos desafíos encontramos los dos siguientes:

– Cooperar y convivir en sociedades abiertas y cambiantes, valorando la diversidad personal y cultural como fuente de riqueza e interesándose por otras lenguas y culturas.

– Aceptar la incertidumbre como una oportunidad para articular respuestas más creativas, aprendiendo a manejar la ansiedad que puede acarrear.

Lamentablemente, el enfoque actual del ámbito científico hace complicado trabajar para conseguir estos retos. La razón principal es que la corriente científica actual tiende a considerar que el único pensamiento científico válido es el pensamiento asociado a la lógica binaria, la lógica del blanco y negro, la lógica sin matices de grises.

Con la finalidad de mostrar que existen otras posibilidades de clasificación más afines al contexto sociocultural actual, el presente trabajo intenta evidenciar que hoy en día ya es posible presentar en las aulas una nueva forma de clasificar basada en la construcción de los conjuntos borrosos, y que, además, puede hacerse a través de la lectura de cuentos tradicionales populares o escritos por autores de prestigio.

Para lograr este propósito, el artículo se estructura en cinco apartados: Después de esta introducción, que conforma el apartado 1, se continúa con el apartado 2 defendiendo la idea de utilizar la lectura de cuentos para la enseñanza matemática, ya que este recurso evita el rechazo hacia la materia por parte del alumnado. En el apartado 3 se presenta el método de trabajo para alcanzar el objetivo anteriormente mencionado y se expone la razón de la selección de cuentos para dicho propósito. En los tres siguientes apartados se espera mostrar paso a paso la relación entre los cuentos seleccionados y la teoría elemental de conjuntos borrosos, que permite clasificar de forma no binaria. En el apartado 4 se justifica cómo el cuento puede ser una herramienta útil para tratar el tema de la vaguedad. A través de diversos ejemplos se muestran las posibilidades de su introducción en las aulas. A continuación, en el apartado 5 se presentan diversos cuentos con los que trabajar en el aula la teoría asociada a la construcción de conjuntos nítidos. Dado que la propuesta en el presente artículo es presentar la teoría de conjuntos borrosos como una ampliación de la teoría clásica de conjuntos, este apartado tiene como objetivo exponer la mínima teoría clásica de conjuntos que el alumnado debe dominar para poder comprender la construcción de los conjuntos borrosos. Finalmente, en el apartado 6 se muestra cómo introducir los conjuntos borrosos en el aula a través de la lectura de cuentos con el propósito final de aprender a clasificar de forma no binaria. A partir de la lectura de diversos cuentos se definen multitud de ejemplos de clasificaciones no binarias. A este respecto resalta el cuento Ricitos de oro, por la gran cantidad de opciones que ofrece.

2. EL CUENTO COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Aprender matemáticas a partir de literatura infantil es un recurso utilizado de forma habitual en las aulas (Arias, 2022; Viladevall *et al.,* 2022; Arteaga *et al.,* 2021; Marín, 2021) que consigue canalizar e interiorizar numerosas emociones y da respuesta a la curiosidad que manifiesta el alumnado (Sánchez *et al.,* 2018).

En el marco del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), que sintéticamente plantea la enseñanza de las matemáticas a partir de secuencias intencionadas que van de lo concreto a lo abstracto, Alsina (2022; 2020; 2019a) sitúa el uso de cuentos para aprender matemáticas dentro de los contextos que denomina intermedios. Estos contextos conducen a la esquematización y modelización progresiva del conocimiento matemático a través de la exploración y la reflexión, por lo que hacen de puente entre los contextos informales que permiten visualizar las ideas matemáticas de manera concreta (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos) y los contextos formales, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales (recursos gráficos como fichas, cuadernos de actividades, etc.).

El libro de Saá (2002), en el que se presenta un análisis profundo del aprendizaje de una gran multitud de temas matemáticos a partir de cuentos, muestra que en las aulas la mayoría de temas de esta asignatura pueden trabajarse perfectamente mediante un manual de historias desenfadadas y emotivas. Para ello, el maestro ha de tener siempre presente que el alumnado de 0 a 6 años tiene una gran sed de aprendizaje y cualquier estímulo externo que recibe es captado y analizado por su mente infantil, obteniendo de ellos una gran cantidad de conocimiento (Flecha, 2012). Siguiendo este razonamiento, es importante tener en cuenta que el estímulo de introducir los cuentos donde las matemáticas estén presentes de forma indirecta puede ser una aportación muy positiva para el futuro conocimiento de dicha asignatura. Y es que en algunos casos en que no se utilizan recursos de este tipo, las matemáticas son transferidas de forma abstracta y descontextualizada, lo que puede provocar un rechazo de la asignatura por parte del alumnado. Para evitar el rechazo, el docente debe aspirar a transformar la asignatura convirtiéndola en atractiva y motivadora; así despertará el interés y la curiosidad del grupo y alcanzará, además, por su parte, satisfacción personal (Marín, 1999). Para lograr este objetivo, el cuento infantil puede ser una gran ayuda: una herramienta con la que transformar conceptos y procedimientos en historias sencillas que suelen ser causa de emoción y alegría para toda el aula.

Ahora bien, tal y como destaca Bryant (1967), primero el cuento debe complacer y después, en todo caso, instruir. Por ello sugiere que el cuento es, ante todo y esencialmente, una obra de arte y su misión principal debe transcurrir por los caminos de lo artístico, vigilando siempre que el argumento guste al alumnado, pues de lo contrario es imposible enseñarle por medio de este recurso. Esta es principalmente la idea que ha guiado la selección de cuentos para el presente artículo. En este sentido, todos los cuentos que se presentan son auténticas obras de arte, tanto a nivel escrito como ilustrado, seleccionados principalmente o bien de recopilaciones de cuentos populares tradicionales sumamente conocidos o bien de autores de reconocido prestigio internacional. El propósito de esta elección ha sido pues intentar garantizar que la selección sea del agrado tanto del profesorado como del alumnado.

Con la finalidad de maximizar los beneficios educativos que los cuentos seleccionados puedan aportar al ser narrados en el aula se debe tener presente una serie de factores citados a continuación. El primero es la importancia que se debe prestar a la forma de narrarlos por parte del profesor, ya que, tal y como comenta Fernández (2014), ello puede condicionar la manera de ser captados por los alumnos. En este sentido, Bryant (1967) puntualiza que, si el narrador goza contando el cuento, los alumnos llegarán a aprovechar el relato y a enriquecerse con su apreciación personal. Consecuentemente, todo profesor que desee utilizar este recurso debe aprender a contar bien un cuento y jamás contar cuentos que no sean de su agrado. Pineda y Lucia (2018) también advierten que el profesorado puede transmitir inconscientemente sus valores, creencias o concepciones a través de los cuentos, y por ello defienden la figura del pedagogo como fuente de reflexión para decidir qué contenidos enseñar y cómo enseñarlos. Otro factor a considerar es la necesidad de utilizar actividades paralelas que ayuden a consolidar los contenidos matemáticos presentados a través de los cuentos. Alsina (2010) advierte a este respecto, con la pirámide de la educación matemática, y posteriormente, a partir de los planteamientos del EIEM (Alsina, 2022; 2020; 2019a), que también se debe prestar atención a la frecuencia de uso de este recurso. Un último factor interesante a tener en cuenta es la necesidad de introducir las TIC en la narración del cuento, y es que, según Sánchez *et al.*, (2018), el uso del cuento mediante este diseño permite evitar discriminaciones entre el alumnado.

3. MÉTODO

El método de trabajo que se ha seguido en el presente artículo parte de la consideración de que una excelente forma de introducir un nuevo tema es mediante la reconstrucción de su historia. Ello se debe, según Anacona (2003), a que en los estudios históricos acerca del desarrollo de un concepto se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica, que posibilitan no solo una mejor comprensión del concepto, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática de su construcción.

Dado que históricamente la clasificación borrosa se sustenta en tres temas claves (Kosko, 1995): la vaguedad, la teoría de conjuntos clásica y la teoría de conjuntos borrosos, la siguiente parte del método de trabajo consistió en hallar las obras literarias infantiles y populares que podrían introducir esta teoría en las etapas de infantil o primaria.

Una vez encontradas las obras literarias, la tercera parte del método consistió en detallar su posible uso en las aulas centrándose en el tipo de ejemplos que dichos cuentos podían aportar.

Los siguientes tres apartados del trabajo presentan los resultados del método.

En primer lugar, en el apartado 4 se trabaja la vaguedad de las palabras. La teoría de conjuntos borrosos parte de la no aceptación de poder clasificar en dos conjuntos, el de las verdades y el de las falsedades de las afirmaciones. La idea de *vaguedad* permite poner en duda la clasificación en tan solo dos conjuntos. Dicha idea es considerada esencial en el inicio histórico de la clasificación no binaria y por ello se ha seleccionado como punto de partida para la introducción de la teoría en el aula.

En segundo lugar, dado que Zadeh (1965) fundamenta la teoría de conjuntos borrosos a partir de la teoría de conjuntos clásica, mostrando que esta no es más que un caso particular de aquella, el apartado 5 presenta cómo trabajar la teoría de conjuntos mediante cuentos en el aula.

Finalmente, con la consolidación por parte de los alumnos de los conocimientos aportados por los dos primeros momentos históricos, es posible entrar en la recta final de estudio de la teoría de conjuntos borrosos que fundamenta la clasificación no binaria. El apartado 6 muestra los resultados del presente método aplicado a dicho tema.

4. LA VAGUEDAD A TRAVÉS DEL CUENTO

Antes de entrar en el tema de la vaguedad se debe estar absolutamente seguro de que los alumnos están mentalmente preparados para comprender dicha idea. Por ello, para que el alumnado pueda entender la teoría asociada a la creación de conjuntos borrosos primero es necesario comprobar que domina la habilidad de identificar las cualidades y atributos de los objetos y seres que le rodean. Por ello, los cuentos cuya historia se basa en determinar la forma, la textura, el color, etcétera pueden ser de gran ayuda para descubrir si se tiene este tipo de conocimientos. Un ejemplo lo encontramos en el cuento *Elmer y los colores* (Mckee, 2020), una alegre introducción al mundo del color a través de diversas situaciones protagonizadas por un pequeño elefante. Preguntar a los alumnos los diferentes colores de los elefantes que aparecen en el cuento nos puede aportar esta información de partida.

Una vez comprobado que el alumnado posee la habilidad necesaria podemos empezar a trabajar el tema de la vaguedad de las cualidades sensoriales de los objetos, tema inherente a los problemas clasificatorios en conjuntos clásicos.

Según Russell (1923), una definición es vaga cuando la relación entre el sistema representativo y el sistema representado no es biunívoca, sino multívoca. Por ejemplo, una fotografía tan desenfocada que pudiera representar igualmente a varias personas es vaga, según esta definición.

El primer ejemplo de cuento que puede ayudar a introducir la vaguedad en el aula es *Pomelo y los contrarios* (Badescu y Chaud, 2011). En él aparecen ilustraciones relativas a los conceptos de *vacío y lleno* que rompen las ideas preconcebidas sobre estos conceptos. Concretamente, en las Figuras 1 y 2 puede apreciarse de qué manera el ilustrador representa los conceptos de *vacío y lleno* con vasos que no están completamente llenos ni vacíos. El cuento, por lo tanto, es ideal para abrir un debate sobre ambos conceptos en el aula. Una de las preguntas que debería aparecer en este debate es: si vamos llenando un vaso de agua poco a poco, ¿en qué momento se puede considerar que está lleno?

FIGURA 1. Representación del concepto vacío

Figura 2. Representación del concepto lleno

El segundo ejemplo de cuento que permite trabajar la vaguedad de las palabras es *Mi libro de olores y colores* (Iwi, 2018). Concretamente, permite trabajar la multivocidad de las cualidades sensoriales a través del color. En la Figura 3 se pueden ver diferentes ilustraciones que tienen por objetivo que los lectores aprendan a identificar el nombre del color violeta con el color asociado que nos transmite el sentido de la vista. En dicha imagen es posible observar que la palabra que representa al color es mostrada indicando diversos objetos que tienen diferentes tonos de dicho color. La diversidad de tonos muestra que la asignación de color y tonos asignados no es unívoca sino multívoca y permite continuar con el debate sobre la vaguedad del lenguaje. Un pequeño experimento de mezcla de colores en el aula puede hacer comprender la dificultad de decidir sobre si ciertos colores pueden considerarse o no violeta.

Figura 3. Representación del color violeta.

No debe preocuparnos si en el aula no hay consenso en decidir si determinados tonos cromáticos pueden o no ser designados mediante una determinada etiqueta de color. Y es que, según Russell (1923), dado que los colores constituyen un continuo, habrá matices cuyo color no sabremos identificar, no porque ignoremos el significado de la palabra que designa cada color sino porque los colores son palabras cuya extensión de aplicación es esencialmente dudosa.

El tercer cuento que puede ayudar a trabajar la vaguedad en el aula es *A color of his own* (Lionni, 2000). En una de sus ilustraciones, representada en la Figura 4, tenemos un ejemplo de no simplificación de la realidad que pretende asociar el color verde con la palabra verde. Guiándonos por las tablas de colores (Küppers, 1979), sabemos que cuando el color verde va bajando de tono puede llegar a confundirse con el amarillo, a la par que si va subiendo de tono puede fundirse con el azul. Consecuentemente, una simple imagen puede permitir trabajar en el aula el hecho de que es perfectamente normal que alguien dude en llamar amarillo o verde a algún tono (barriga del loro de la Figura 4) o bien verde o azul (cola del loro de la Figura 4). Con ello vemos que es posible entrar de lleno a trabajar en el aula, mediante simples ilustraciones, lo que Russell (1923) denomina zona de penumbra de las palabras.

Figura 4. Ilustración de Leo Lionni en el cuento *A color of his own* (Lionni, 2000) para ilustrar el color verde.

La zona de penumbra de las palabras, asociada esta vez a una cualidad de forma, puede encontrarse en el cuarto ejemplo de cuento a trabajar en el aula, *Pomelo y las formas* (Badescu y Chaud, 2014). El autor, en un momento determinado del libro, se centra en la forma cuadrada de los lados de un cubo. Después de identificarla con diversos cubos (cubito de hielo o dado), nos habla de la cuadratura deforme de la gelatina y presenta la ilustración de la Figura 5. La inclusión de la palabra *deforme* después de *cuadratura* indica que el autor tiene claro que no está en un contexto tan bien definido de *cuadrado* como en los anteriormente mostrados y que se halla en la zona de penumbra límite de la definición.

Figura 5. La cara del cubo como ejemplo de una forma cuadrada.

5. TEORÍA CLÁSICA DE CONJUNTOS A TRAVÉS DE CUENTOS

La teoría clásica de conjuntos es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos. Dicha teoría, creada por Cantor entre 1874 y 1897 (Huertas y Manzano, 2004), es esencial para fundamentar la aritmética o la probabilidad y proporciona el lenguaje formal con el que expresar la semántica de la lógica de predicados (Huertas y Sesa, 2019), siendo además una de las bases del cuerpo de conocimientos algebraicos que se aprenden desde etapas tempranas, bajo el nombre de *early algebra* (Alsina, 2019b).

A continuación, presentaremos cómo, mediante cuentos, podemos trabajar en el aula la teoría clásica de conjuntos, que se debe dominar para poder introducir a posteriori la clasificación no binaria mediante la teoría de conjuntos borrosos.
En la teoría clásica de conjuntos se define un conjunto como toda colección bien definida de objetos. Esto implica que no puede haber ninguna duda sobre si un objeto cualquiera pertenece o no al conjunto. Estos conjuntos reciben particularmente el nombre de conjuntos nítidos.

Definido lo que es un conjunto nítido, vamos a pasar a ver cómo trabajar mediante cuentos las dos formas posibles de construirlos.

La primera forma de crear un conjunto consiste en listar los objetos que pertenecen a él. Existen multitud de cuentos para trabajar esta forma de construir conjuntos. Por ejemplo, en *Los músicos de Bremen* (Put y Toutiatou, 2018), a partir del conjunto referencial *personajes que aparecen en el cuento*, el conjunto *animales protagonistas* es un conjunto que se va construyendo por este método. En el cuento se explica que un asno se dirige a la ciudad de Bremen para ser músico. Por el camino se encuentra con un gato que también desea ser músico, así que deciden ir juntos. Posteriormente se unen a ellos un perro y un gallo, y así acaba de formarse el conjunto final de animales protagonistas (el asno, el gato, el perro y el gallo). También en *Los cinco feos* (Donaldson y Scheffler, 2018) puede apreciarse esta forma de creación de un conjunto mediante un listado que se va formando a medida que transcurre la historia.

La segunda forma de crear conjuntos se realiza construyéndolo a partir de determinar la colección de objetos caracterizados por el cumplimiento de una o varias propiedades (el predicado). Por ejemplo, en el cuento *El flautista de Hamelín* (Grimm et al. 2017) aparecen conjuntos formados a partir de los predicados *ser rata* o *ser niño.* Un segundo ejemplo de cuento a utilizar en el aula para afianzar la construcción de conjuntos con este método es el cuento *Nidos* (Márquez y Colombo, 2013). En él se puede observar cómo se construyen diversos conjuntos siempre a través de un breve texto acompañado de una ilustración. Por ejemplo: “En la naturaleza existen muchos seres vivos”, y aparecen dibujados una serie de animales de diversas especies (un ratón, una serpiente, un cangrejo, un gato, un conejo…). Con este procedimiento se ha creado un conjunto a partir del predicado *ser un ser vivo,* puesto que citar cada caso de manera particular sería una tarea ardua y no aportaría mayor información. El cuento continúa creando nuevos conjuntos por este sistema con predicados del tipo: *ser terrestre* (oveja, caballo, toro…) o *ser acuático* (delfín, foca, ballena…).

Después de que el maestro compruebe que el alumnado es capaz de crear todo tipo de conjuntos, es necesario, a fin de dominar la teoría esencial que fundamenta la clasificación borrosa, pasar a dominar el concepto de pertenencia y no pertenencia de un elemento a un conjunto. En lenguaje coloquial de la teoría de conjuntos clásica se dice que un elemento pertenece a un conjunto si aparece en el listado que construye al conjunto o si satisface el predicado que caracteriza al conjunto. Similarmente, un elemento no pertenece a un conjunto si no aparece en el listado que construye al conjunto o si no cumple el predicado que caracteriza al conjunto. Dos cuentos ideales para trabajar la idea de pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto son *El patito feo* (Andersen y Kirkland, 2015) y *Pinocho* (Collodi y Adreani, 2014). El primer cuento presenta la idea de que el patito feo no pertenece al conjunto de patos, mientras que en el segundo cuento el muñeco de madera no es aceptado como persona humana. Puede resultar interesante reforzar estos conceptos a partir de las ideas que las ilustraciones presentan. A título de ejemplo, en la Figura 6 se reproduce la imagen de portada del cuento del patito feo de la editorial Picarona (Filipek y Kirkland, 2019). En ella se puede observar como Kirkland agrupa el conjunto de patitos separándolos del patito que no encaja en el grupo, permitiendo comprender, mediante una simple imagen, los conceptos de conjunto, pertenencia y no pertenencia. En el aula pueden realizarse actividades basadas en juegos o fichas donde se deba decidir si un elemento pertenece o no a un conjunto.

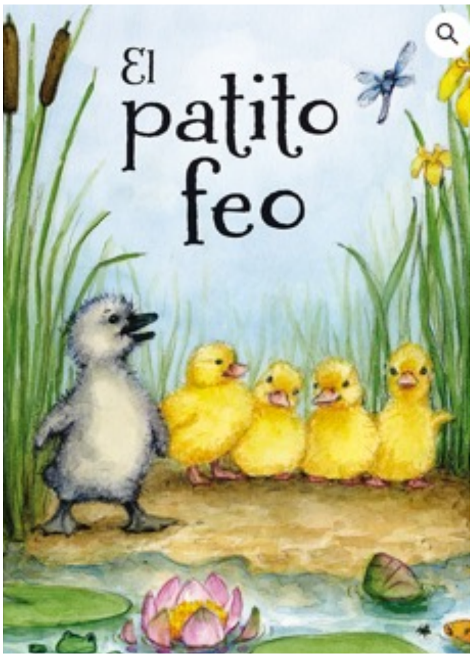

Figura 6. Representación del conjunto de patitos.

6. LA TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS A TRAVÉS DEL CUENTO

Finalmente, en este apartado mostraremos una colección de cuentos que permiten introducir la teoría de conjuntos borrosos en el aula.

La teoría clásica de conjuntos parte de la idea de que todo conjunto debe estar bien determinado, en el sentido de que se debe siempre poder decidir sin ningún tipo de ambigüedad si un determinado elemento forma parte o no de él. La teoría de conjuntos borrosos (Zadeh, 1965) flexibiliza esta restricción aceptando que los elementos pueden pertenecer parcialmente al conjunto. Los conjuntos creados bajo esta concepción son llamados conjuntos borrosos y conforman el constructo sobre los que se basa esta nueva teoría de variadas aplicaciones prácticas (Viladevall *et al.* 2021; 2020). En la Figura 7 se presenta una de las imágenes mentales más icónicas de un conjunto borroso. Fue sugerida por Kosko (1995) y marcó el nacimiento de lo que se ha llamado desde entonces *pensamiento borroso*, el pensamiento originado al aceptar que los elementos pueden pertenecer parcialmente a los conjuntos. En dicha figura se muestra una serie de imágenes de una manzana comida mordisco a mordisco. Con la idea fundacional de la teoría de conjuntos borrosos, Kosko explica que no tiene ningún sentido intentar hallar solución a la pregunta: ¿en qué momento una manzana que se va comiendo mordisco a mordisco deja de ser manzana? Y es que la teoría de conjuntos borrosos, al aceptar que todos los objetos representados por las imágenes de la Figura 7 pertenecen al conjunto de manzanas, aunque sea en grado cero, hace absurda la pregunta y evita así la aparición de la paradoja sorites. Esta idea de aceptar la infinita gradualidad del todo a la nada es la esencia vital de los conjuntos borrosos (Ferrer *et al.* 2018; Linares *et al.* 2018). Obsérvese que una manzana representada por la imagen de más a la izquierda en la Figura 7 puede ser considera manzana al 100 %. Cuanto más vayamos hacia la derecha, el objeto representado menos será considerado manzana, hasta que no tengamos nada y esa representación sería considerada manzana al 0 %. Bajo esta idea media manzana no ofrece ningún tipo de conflicto sobre si es o no manzana, puesto que el objeto puede ser considerado manzana al 50 %.

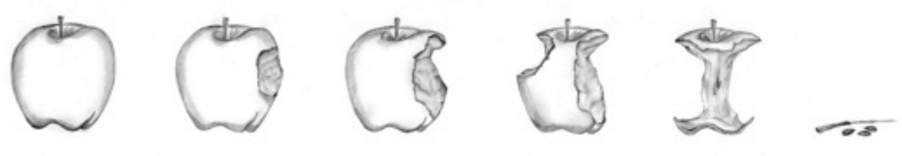

Figura 7. Diferentes representaciones de manzanas mordidas.

Dado que en el mundo de los cuentos infantiles aparecen ejemplos de conjuntos borrosos muchas más veces de las que somos conscientes, a continuación, se muestran diversas propuestas de cuentos que pueden ayudar al profesorado a trabajar la creación de estos conjuntos en el aula y, por ende, ayudar a construir en las mentes infantiles poderosas imágenes mentales de esta nueva teoría.

La primera propuesta para abordar la creación de un conjunto borroso de forma clara y concisa es el cuento *Fish is Fish* (Lionni, 2015). En él, Lionni muestra la transformación de un renacuajo que se convierte en una rana y que vivirá apasionantes experiencias fuera del lago donde vive. Bajo el prisma de la teoría de conjuntos borrosos, las diferentes ilustraciones del renacuajo convirtiéndose en rana muestran elementos con diferentes grados de pertenencia al conjunto formado por el predicado *ser rana.*

La segunda propuesta que permite trabajar en el aula la creación de un conjunto borroso es el cuento *¿Pequeño o grande?* (Tullet, 2015), donde el crecimiento progresivo del pez protagonista al comer peces más pequeños provoca un aumento de su tamaño. El cuento acaba con la sorpresa de hacer creer al lector que finalmente el pez es gigante, cuando en realidad sigue siendo pequeño.

La tercera propuesta que queremos presentar se encuentra en un cuento que trata las emociones. En *Pomelo y los contrarios* (Badescu y Chaud, 2011) el autor trata de representar la dicotomía no alegría/alegría mediante las ilustraciones de la Figura 8. En ellas se representa tres veces al mismo personaje con una expresión distinta cada vez, pasando de forma gradual de la *no alegría* a la *alegría* completa, mostrando con ello que el concepto de alegría es un concepto afín a la teoría de conjuntos borrosos.

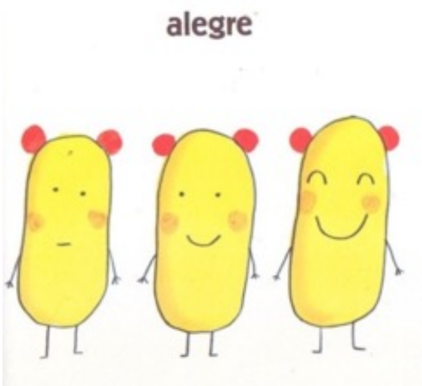

Figura 8. De no alegre a alegre.

Para finalizar, se va a mostrar un cuento popular que permite por sí mismo construir en el aula multitud de conjuntos borrosos. El cuento en cuestión es *Ricitos de Oro y los tres osos*, versión actual del cuento *La historia de los tres osos,* escrito por el poeta y escritor Robert Southey (Southey, 1837). Debido a la gran cantidad de versiones actuales publicadas por distintas editoriales, a continuación se presentan diferentes posibilidades de creación de conjuntos borrosos recopilados a partir de la lectura de una selección variada de dichas versiones.

En multitud de versiones actuales (Parot, 2020; Ballesteros y Tanco, 2018; Torras, 2017; Patience, 2004), al iniciarse el cuento los tres osos protagonistas deciden salir a pasear porque la sopa preparada por la madre está *muy caliente* y así dan tiempo a que se enfríe. Con esta presentación ya se introduce un conjunto borroso basado en el predicado *estar caliente.* Dado que inicialmente esa sopa está excesivamente caliente -hecho que transmite la idea de un grado extremo de calor- y se espera que se enfríe, el cuento da a entender que hay otros grados de calor tolerables para comer esa sopa. Además, este conjunto borroso puede quedar más definido en el momento en el que la pequeña Ricitos entra en la casa y descubre los tres platos con sopa, pues en ciertas versiones, como en las de las editoriales Kalandraka (Ballesteros y Tanco, 2018) y Picarona (Filipek y East, 2016), el plato grande de sopa está demasiado caliente, el plato mediano está demasiado frío y el plato pequeño está en su punto. Prosiguiendo el análisis del cuento, esta misma idea de construcción de un conjunto borroso se repite cuando Ricitos decide probar las tres camas. La grande es demasiado dura, la mediana demasiado blanda y la pequeña es perfecta. La dureza de las camas vuelve a hacer patente la existencia de otro conjunto borroso y el paso progresivo de lo *duro* a lo *no duro* permite crearlo. Para el siguiente ejemplo, partiremos de una versión de la editorial Santillana (Kratky y García, 2015). En dicha versión, cuando la protagonista decide sentarse en las sillas empieza por la silla de mayor tamaño, pero resulta ser muy alta. Así que prueba a sentarse en la silla mediana, que es *bastante alta.* No hay que decir que la silla pequeña está a la altura perfecta para que Ricitos pueda sentarse y, tal y como sucede en la mayoría de adaptaciones, la silla acaba rompiéndose. La ilustración que acompaña esta parte del cuento, reproducida en la Figura 9, refuerza la idea de gradación de más a menos añadiendo un matiz extra a los adverbios cualitativos adyacentes *muy* y *bastante*, pues se ve que las dos sillas no son de la misma altura y por lo tanto los conjuntos de sillas con predicado *tener el asiento alto* forman un conjunto borroso. Aquí, por lo tanto, tenemos una idea de presentación de un conjunto borroso distinta a las anteriores porque el valor perfecto no está entre los dos extremos como acontecía en los dos casos anteriores. Otro conjunto similar a este puede crearse a partir del tono de voz de cada oso (Filipek y East, 2016), ya que la voz de papá oso tiene un tono muy fuerte, la de mamá osa tiene un tono fuerte y la del pequeño oso tiene un tono menos fuerte. En la versión original, el propio Southey (1837) presentó una idea similar utilizando el tamaño de letra para representar el tono de voz cuando los osos hablaban, usando un tamaño grande para el oso grande, mediano para el oso mediano y pequeño para el oso pequeño.

Figura 9. Conjunto de sillas con predicado ser altas.

Por otra parte, *Ricitos de Oro y los tres osos* es una obra en la que se da pie a trabajar la borrosidad a nivel emocional (Monreal y López, 2009). Este hecho queda patente en el momento en el que los tres osos regresan a su casa y descubren que alguien ha probado su sopa, lo que les provoca un primer enfado. Seguidamente se dan cuenta de que alguien se ha sentado en sus sillas y de *enfadados* pasan a *muy enfadados*, pero cuando descubren sus camas utilizadas y a la niña durmiendo en una de ellas los tres osos están ya *enfadadísimos*, llegando al punto máximo en el estado de enfado. También se puede trabajar la creación de otros conjuntos borrosos de términos emocionales asociados a los osos. Por ejemplo, en alguna versión (Viana y Ribera, 2001) se menciona que papá oso habla con un fuerte vozarrón pues está *muy indignado* y mamá osa presenta una voz más suave que transmite una sensación de estar *un poco apenada,* reflejando la borrosidad de las palabras a través del uso de adverbios de cantidad como son los términos *muy* o *poco*. También Ricitos puede presentar diversos estados de ánimo que dan pie a otros ejemplos de conjuntos borrosos (Delgado y Sua, 2019; Filipek y East, 2016). Las situaciones de que se *aburría tanto* en casa que decide salir a pasear por el bosque o que al perderse se *preocupó mucho* son muestras de ello. También pasa *muchísimo miedo* al ver a los tres osos mirándola enojados y siente *mucha vergüenza* al tener que admitir su error al entrar y comportarse de forma nada educada en casa ajena. Como vemos, el cuento abre tantas posibilidades que ello lo convierte sin ningún tipo de duda en ideal para presentar la teoría de Zadeh.

7. CONCLUSIONES

El presente artículo ha puesto de manifiesto que la lectura de cuentos puede introducir de manera amena la teoría de conjuntos borrosos en las aulas de infantil y primaria, pues constata que existe suficiente literatura infantil para este propósito. Concretamente, se ha mostrado que es posible introducir dicha teoría mayoritariamente mediante cuentos tradicionales sumamente populares o escritos por autores de prestigio. Con ello queda patente que no es necesario crear nuevos cuentos para este fin, confirmando que la literatura infantil actual sigue siendo fuente de aprendizaje para enseñar distintos comportamientos y actuaciones en determinadas situaciones de la vida cotidiana, tal y como pasaba en tiempos antiguos, según los planteamientos de Torra (1997).

Como principal limitación, el artículo no ha presentado una lista exhaustiva de todos los conceptos o procedimientos de la teoría de conjuntos borrosos que se pueden trabajar en el aula de infantil o primaria. En este sentido, el presente trabajo tan solo ha mostrado una posible forma de introducir en el aula de infantil o primaria los objetos más elementales de la teoría de Zadeh, los conjuntos borrosos, que permiten introducir una forma de clasificación no binaria (Linares *et al.*, 2020). Por ello, será necesario diseñar nuevos estudios, tanto teóricos como experimentales, para que en un futuro se pueda hablar de qué se debería presentar en infantil o primaria de la teoría de conjuntos borrosos y cómo debería presentarse al alumnado. Asimismo, tampoco se ha pretendido afirmar que la mejor opción de introducir la teoría sea mediante la lectura de cuentos. Tan solo se propone como una opción viable que ya ha sido confirmada en la introducción de otros temas.

El presente trabajo espera, eso sí, abrir un debate en torno al hecho de que la vaguedad y la teoría de conjuntos borrosos no han sido aún evaluadas para ser incorporadas al currículo escolar y advierte que sin su incorporación se corre el peligro de llegar a pensar que el único pensamiento posible, por ser el único mostrado en la escuela, es el binario. Es solo cuestión de tiempo que los alumnos lleguen a ver que la vida no es un dibujo en blanco y negro, y que los matices de la vaguedad nos hacen ver que es imposible clasificar ciertos elementos en conjuntos evaluando si pertenecen o no pertenecen a él. En la sociedad actual ya no deberíamos separar a las personas normales de las *discapacitadas intelectualmente*, hablar de *personas blancas* o *no blancas,* ni diferenciar el *sexo masculino* del *sexo femenino.* El mundo tiene muchos tonos de gris. El binarismo inamovible que se enseña en las escuelas debería ser complementado con la borrosidad. Por ello creemos que hemos de ser capaces de modificar el sistema educativo actual con una mente más abierta a los retos que nos presenta el mundo de hoy, aceptando que el concepto final que debería acompañar a los conjuntos fuese el de borrosidad.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas* (3-6 años). Barcelona: Editorial Graó.

____ (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? TANGRAM – *Revista de Educação Matemática*, 2, 3, 127-159.

____ (2019a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas* (6-12 años). Barcelona: Editorial Graó.

____ (2019b). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia 1, 8, 1-19.

____ (2010). La 'pirámide de la educación matemática': una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. A*ula de Innovación Educativa,* 189, 12-16.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. Revista Ema, 8, 1, 30-46.

Arias García, J. R. (2022). Tuiteando cuentos matemáticos: intervención educativa en el Grado de Educación Infantil. Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia*, 11, 1, 66-94.

Arteaga Martínez, B., Hernández, A. y Macías Sánchez, J. (2021). El aprendizaje de contenidos lógico-matemáticos a través del cuento popular en Educación Infantil. *Ocnos,* 20, 3, 1-22.

Badescu, R. y Chaud, B. (2014). Pomelo y las formas. Madrid: Kókinos.

____ (2011). *Pomelo y los contrarios. Madrid:* Kókinos.

Ballesteros, X. y Tanco, M. (2018). *Los tres osos.* Pontevedra: Kalandraka.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Helping Elementary Teachers Build Mathematical Generality into Curriculum and Instruction. ZDM: *International Reviews on Mathematical Education*, 1, 37, 34-42.

Bryant, S. C., (1967). *El arte de contar cuentos*. Barcelona: Nova Terra.

Collodi, C. y Adreani, M. (2014). *Pinocho.* Madrid: San Pablo.

Delgado, A. y Sua, L. (2019). *Emociónate con Ricitos de Oro*. Madrid: Susaeta Ediciones.

Donaldson, J. y Scheffler, A. (2018). *Los cinco feos.* Madrid: Editorial Bruño.

Fernández Cerrada, M. (2014). *La enseñanza de las matemáticas a través de los cuentos.* Trabajo de fin de grado. Navarra: Universidad de Navarra.

Ferrer Comalat, J. C.; Bertran Roura, X.; Linares Mustarós, S. & Corominas Coll, D. (2018). Six experimental activities to introduce the theory of fuzzy sets. En *Complex Systems: Solutions and Challenges in Economics, Management and Engineering.* Berger-Vachon, C., Gil-Lafuente, A. M., Kacprzyk, J., Kondratenko, Y., Merigó, J. M. & Morabito, F. C. (Eds.), 85-107. Cham: Springer.

Filipek, N. y East, J. (2016). *Ricitos de Oro y los tres osos*. Rubí: Picarona.

Filipek, N. y Kirkland, K. (2019). *El patito feo.* Rubí: Picarona.

Flecha López, G. (2012). Matemáticas y literatura de 0 a 3: Ricitos de Oro y los tres osos. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia,* 1, 2, 72-77.

Grimm, J.; Grimm, W. y Serra, A. (2017). *El flautista de Hamelín.* Madrid: Anaya.

Huertas Sánchez, M. A. y Manzano Arjona, M. (2004). *Lógica para principiantes.* Salamanca: Anaya.

Huertas Sánchez, M. A. y Sesa Nogueras, E. (2019). *Teoría de conjuntos básica.* Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya.

Iwi, M. (2018). *Mi libro de olores y colores. Mis primeros olores.* París: Auzou.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dartmouth: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kosko, B. (1995). P*ensamiento borroso: La nueva ciencia de la lógica borrosa.* Vic: Crítica.

Kratky, L. J. y García, C. (2015). *Ricitos de Oro y los tres osos*. Doral: Santillana USA Publishing Co.

Küppers, H. (1979). *Atlas de los colores: más de 5500 matices con su caracterización y las instrucciones para su mezcla.* Barcelona: Editorial Blume.

Linares Mustarós, S.; Viladevall Valldeperas, Q. y Ferrer Comalat, J. C. (2020). La clasificación en la teoría de conjuntos borrosos. En *Edunovatic 2020. Conference Proceedings: 5th Virtual International Conference on Education, Innovation and ICT, December 10-11, 2020.* REDINE (Red de Investigación e Innovación Educativa), 653-654 .

Linares Mustarós, S.; Viladevall Valldeperas, Q.; Llacay Pintat, T. y Ferrer Comalat, J. C. (2018). Una introducción a las ideas fundamentales de la lógica borrosa a través del arte. *Cuadernos* del CIMBAGE, 20, 1, 133-156.

Lionni, L. (2000). *A color of his own.* Nueva York: Alfred A. Knopf.

_____ (2015). *Fish is Fish*. Nueva York: Random House.

Marín Rodríguez, M. (1999). El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos. R*evista Números* 39, 27-38.

Marín Rodríguez, M. (2021). Pensamiento matemático y cuentos en Educación Infantil. Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia*, 10, 1, 30-44.

Márquez, P. y Colombo, N. (2013). *Nidos*. Sevilla: Kalandraka.

Mckee, D. (2020). *Elmer y los colores*. Londres: Beascoa.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022a). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022b). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE.

Monreal, V. y López Narváez, C. (2009). *Ricitos de Oro y los tres osos*. Madrid: Editorial Bruno.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: SAEM Thales.

Parot, A. (2020). Ricitos de Oro. Barcelona: Timun Mas Infantil.

Patience, J. (2004). *Ricitos de Oro y los tres osos.* Oiartzun: Ediciones Saldaña.

Pineda Robayo, A. D. R. y Lucia Felicetti, V. (2018). "Comprensiones sobre la práctica pedagógica del profesor: la lúdica en la Hora del Cuento". *Educação*, 3, 43, 393-412.

Put, K. y Toutiatou, S. (2018). *Los músicos de Bremen*. Amberes: Ballon.

Russell, B. (1923). Vagueness. T*he Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, 1, 2, 84-92.

Saá Rojo, M. D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. Madrid: Editorial EOS.

Sánchez Calleja, L.; Benítez Gavira, R. y Aguilar Gavira, S. (2018). El triángulo de la educación infantil: los cuentos, las emociones y las TIC. *Hachetetepé. Revista Científica de Educación y Comunicación*, 16, 29-38.

Southey, R. (1837). The story of the three bears. En *The doctor: Volume iv*, 327-329. Londres: Longman.

Torra Bitlloch, M. T. (1997). Los cuentos en clase de matemáticas... algo más que un recurso. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 11, 107-116.

Torras, M. (2017). *Ricitos de Oro y los tres osos*. Nueva York: Parragon Inc.

Trujillo, G. (2022). El feminismo queer es para todo el mundo. Madrid: Catarata.

Tullet, H. (2015). *Pequeño o grande*. Barcelona: Plataforma Editorial.

Viana, A. y Ribera, M. (2001). *Ricitos de Oro.* Borriana: Dylar Ediciones.

Viladevall Valldeperas, Q.; Linares Mustarós, S. y Ferrer Comalat, J. C. (2022). Com ho farem? Descripció d'un taller amb diverses activitats artístiques i matemàtiques per desenvolupar la creativitat en alumnes de primària. *Noubiaix*, 49, 31-44.

_____ (2021). *From everything to nothing. 10 works for* *reflecting on non-binary context.* Girona: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona.

____ (2020). *L'increïble enginy dels animals. Catàleg de la mostra expositiva*. Girona: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona.

Wilchins, R. (2007). *Burn the Binary!* Nueva York: Riverdale Avenue Books LLC.

Wilchins, R.; Nestle, J.; Howell, C.; Rivera, S.; Wright, S. y Reiss, G. (2020). *GenderQueer-Voices from Beyond the Sexual Binary*. Nueva York: Riverdale Avenue Books LLC.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 3, 8, 338-353.