RHV, 2024, No 26, 269-298 eISSN 0719-4242
DOI: https://doi.org/10.22370/rhv2024iss26pp269-298
Sección Miscelánea / Articles

El saber matemático desde la experiencia humana: el caso de la percepción visual y la arquitectura griega

Mathematical Knowledge from Human Experience: The Case of Visual Perception and Greek Architecture

Lianggi Espinoza Ramírez*; Andrea Vergara Gómez**; Vicente Cabrera Soto***

*Universidad de Valparaíso, Chile
lianggi.espinoza@uv.cl
https://orcid.org/0000-0003-1526-7229
**Universidad Católica del Maule
avergarag@ucm.cl
***Universidad Católica del Maule
vicente.cabrera@alumnos.ucm.cl

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar que en la arquitectura griega antigua es posible encontrar una génesis del modelado geométrico de la percepción visual presente en las proposiciones de la *Óptica de Euclides*, considerando el conocimiento matemático como una expresión de la sabiduría humana. Partimos señalando que el pensamiento matemático no está enraizado exclusivamente en la matemática disciplinar, sino que abarca además el amplio espectro de actividades humanas, inclusive aquellas que provienen de la vida cotidiana. Con base en esto, presentamos una caracterización sociocultural de la experiencia humana como fuente y

Received: 03/05/2024. Final version: 08/07/2024

sustento del saber matemático. Posteriormente, con base en un análisis de contenido y contextual de la *Óptica de Euclides*, explicamos el uso y desarrollo de la geometría en el estudio de diversos efectos ópticos de percepción visual en el arte arquitectónico plasmado en la Acrópolis de Atenas. Focalizamos nuestro análisis en una de las obras arquitectónicas más emblemáticas de la cultura griega antigua: el Partenón de Atenas.

Palabras clave: práctica cotidiana, percepción visual, experiencia, geometría, contextualización.

Abstract

This paper aims to show that in ancient Greek architecture, it is possible to find a genesis of the geometric modeling of visual perception present in propositions of Euclid's Optics, considering mathematical knowledge as a human wisdom expression. Let us start by emphasizing that mathematical thinking is not exclusively rooted in mathematical disciplines, but also includes the broad spectrum of human activities, including activities that come from everyday life. Based on this, we present a socio-cultural characterization of human experience as the source and sustainer of mathematical knowledge. Thereafter, on the basis of a content and contextual analysis of *Euclid's Optics*, we explain the use and development of geometry in the study of various optical effects of visual perception in the architectural art embodied in the Acropolis of Athens; and we focus our analysis on one of the most important of these effects, the Acropolis of Athens. We focus our analysis on one of the most emblematic architectural works of ancient Greek culture: the Parthenon of Athens.

Keywords: Everyday practice, visual perception, experience, geometry, contextualization.

1. Introducción

La importancia que ha tenido y tiene la matemática para los seres humanos es inmensa. Esta nos ha acompañado desde nuestros orígenes y ha jugado un rol protagónico, tanto en nuestras maneras de entender al mundo como de transformarlo. Ahora bien, nuestras comprensiones acerca de qué es la matemática determinará nuestra manera de reconocerla, entenderla y transmitirla a las nuevas generaciones. De aquí la relevancia de preguntarnos ¿qué es la matemática? Una respuesta común es concebir a la matemática como el conocimiento matemático producido por los seres humanos, es decir, los objetos de la matemática disciplinar. Desde esta mirada, la matemática son los teoremas, las definiciones, los algoritmos, etc. Sin embargo, cabe preguntarse qué son las matemáticas desde una dimensión que incluya al ser humano haciendo matemáticas. En este sentido, todo el conocimiento matemático que tenemos es conocimiento dentro de la matemática humana, y no hay manera de saber si los teoremas demostrados por los matemáticos tienen alguna validez, inmutable y objetiva, externa al mismo ser humano (Lakoff y Núñez, 2000). En consecuencia, adquiere interés comprender el pensamiento humano antes que la matemática como cuerpo de conocimiento.

En investigaciones del campo de la Educación Matemática han entendido tradicionalmente al pensamiento matemático como aquello que ocurre en las mentes de los matemáticos al hacer matemáticas. De manera general, en la literatura se entiende *pensamiento matemático* a "la diversidad de formas en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ámbitos diversos" (Cantoral, 2013, p. 59). Es decir, hace alusión a la reflexión espontánea que los matemáticos realizan en los procesos de descubrimiento, invención o aplicación de las matemáticas. Si bien, una virtud de este posicionamiento es situar a la matemática como un proceso humano, a este posicionamiento subyace una comprensión de la matemática como un conocimiento abstracto, universal y desprendido de la experiencia humana (Espinoza, 2009).

Dado los retos educativos actuales de concebir, explorar y enseñar a la matemática desde su vínculo con diversas actividades humanas, en las últimas décadas ha surgido una visión alternativa de entender a la matemática y al pensamiento matemático. Esta mirada amplía conceptualmente la noción de pensamiento matemático al considerar que este se desarrolla entre todos los seres humanos al enfrentar cotidianamente múltiples tareas (Cantoral, 2013). De esta manera:

> El pensamiento matemático no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos profesionales, sino que trata de todas las formas posibles de construir nociones matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana de toda persona y comunidad (Cantoral, 2013, p. 60-61).

En esta línea, diversos enfoques teóricos socioculturales del campo de la Educación Matemática han buscado posicionar a la *actividad humana* como fuente epistemológica para comprender a la matemática. Es el caso de, entre otras, la Etnomatemáticas (D´Ambrosio, 1990), la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006), Teoría Antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999) y la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2013). En el caso de esta última, a la fecha se han realizado cerca de un centenar de investigaciones que han explorado al saber desde diversas *actividades humanas*. Asumimos el saber o los saberes como procesos deliberados para el uso compartido del conocimiento (Cantoral, 2013). Esta perspectiva del saber posiciona a la experiencia humana como fuente y sustento del saber, en un intento por humanizar los saberes matemáticos (Cantoral *et al.*, 2015).

La investigación fundacional de la TSME estudió la construcción social de la analiticidad en el desarrollo del cálculo y el análisis matemático (Cantoral, 2001). En esta investigación, que opera como ejemplo paradigmático en el enfoque teórico (Espinoza y Vergara-Gómez, 2019), se estudiaron obras originales de Galileo, Newton, Euler, Fourier, Cauchy y otros matemáticos notables. Como conclusión, se defiende la tesis de que la actividad humana de la búsqueda de predecir tiene un carácter normativo sobre la construcción del conocimiento matemático (Cantoral, 1990). De esta investigación se desprende una hipótesis teórica que con los años se vuelve central en la TSME. Esta hipótesis señala que el conocimiento matemático, incluso aquel que se considera avanzado, tiene un origen y una función social vinculados a un conjunto de actividades prácticas socialmente establecidas, que lo anteceden y que acompañan su desarrollo (Cantoral, 2001).

Posteriormente, bajo esta hipótesis se ha ampliado el campo de estudio e investigado el desarrollo del pensamiento matemático desde la actividad humana. Estas investigaciones abordan prácticas no sólo científicas, sino también técnicas, étnicas, artísticas y cotidianas. Ejemplos de estas investigaciones son explicitar conjeturas matemáticas, matematizar fenómenos biológicos, desarrollo de protocolos toxicológicos, calcular dosis médicas, tomar decisiones para inversiones financieras, interpretar la opinión pública, construcción de casas, siembra y tejido, hacer trueques en mercados tradicionales, crear nuevos espectáculos de malabarismo y artes circenses, entre otras (Cantoral *et al.*, 2018). Con base en los resultados de investigación obtenidos en estos estudios, se postula que:

> Al pensar en la matemática, se requiere legitimar y explorar toda forma de saber, sea este culto, técnico y popular, los cuales, en su conjunto, conforman la sabiduría humana (Cantoral, 2013).

De esta manera, desde la TSME se concibe al pensamiento matemático desde la sabiduría humana, posicionando a la vivencia y experiencia humana como sustento y fuente del saber matemático. En efecto, no se entiende al saber como un conocimiento separado e independiente de toda experiencia, más bien, se le concibe "lleno de" y "en" experiencia (Espinoza, 2014). Dado el amplio uso que ha tenido este planteamiento en investigaciones en Educación Matemática, consideramos la necesidad de poder profundizar la caracterización respecto a lo que significa concebir al saber matemático desde la experiencia humana y como fruto de la sabiduría humana. A continuación, realizamos esto, bosquejando teóricamente la propuesta y escudriñando desde un ejemplo específico: el uso de la geometría de Euclides en el arte arquitectónico de Atenas.

2. La experiencia humana y el saber matemático

El argumento de posicionar a la experiencia humana como fuente y sustento del saber matemático obedece a la búsqueda actual de vincular la enseñanza de la matemática con contextos del mundo real de los aprendices. En efecto, reformas educativas contemporáneas enfatizan la necesidad de propiciar que los estudiantes puedan vincular las matemáticas que aprenden en la escuela con el mundo en el que viven y puedan reconocer el papel que desempeñan en el mundo (OECD, 2019). Sin embargo, a pesar de tener dos décadas en este paradigma educativo, no se ha logrado un real vínculo entre la matemática y los contextos experienciales de los estudiantes (Espinoza, Vergara-Gómez *et al.*, 2020).

En efecto, diversos intentos de vincular la matemática con el mundo real en general sólo logran evocar situaciones realistas de manera artificial (Alsina, 2007) y no consideran realmente las características contextuales del conocimiento matemático (Montiel y Jácome, 2014; Arrieta y Díaz, 2015). En definitiva, en la educación se siguen soslayando los aspectos sociales, contextuales y culturales de la construcción del conocimiento (Soto y Cantoral, 2014). Al continuar enfatizando el aprendizaje basado en la memorización de algoritmos y conceptos, suelen dejarse fuera significados, procedimientos y argumentos que son constitutivos del saber matemático (Espinoza *et al.*, 2018). Tales significados del saber matemático, anclados a la experiencia humana, hoy se encuentran perdidos, simplificados o invisibilizados en la matemática escolar (Espinoza, Vergara-Gómez *et al.*, 2020).

Todo este escenario manifiesta la necesidad de posicionar a la experiencia humana como fuente y sustento del saber matemático. Ahora bien, al referirse a la noción de experiencia, algunos autores consideran una demarcación entre conocimiento experiencial y conocimiento racional. Algunos, al considerarla en el ámbito de la actividad práctica, consideran a la experiencia separada de la explicación racional de las causas de los fenómenos (Rettich, 2019). Otros ubican al conocimiento experiencial en la esfera del conocimiento intuitivo adquirido mediante la percepción sensorial y automática del mundo, el que puede considerarse independiente o incluso en contraposición al conocimiento racional (Kahneman, 2003). Desde esta perspectiva, se asume a la experiencia y a la intuición humana desprendida de una dimensión racional.

Al respecto, nuestro posicionamiento es considerar que, si bien la experiencia está arraigada a las vivencias que acumula el ser humano en su relación con el mundo, esta no está escindida de racionalidad. Reconociendo la distinción entre conocimiento teórico y práctico —en el sentido de vivencia individual versus prácticas teorizadas (Rettich, 2019)—, subrayamos que no entendemos a ambos polos como dicotómicos. Entender esto es necesario para explorar la producción y uso de saber matemático desde la experiencia humana. Asumiendo a la experiencia en el marco de la noción de praxis de Freire (1971), entendemos a la experiencia humana como una unidad sistémica y constitutiva de lo que implica ser y estar en el mundo, el sistema [acción-reflexión].

La definición de experiencia según la RAE se refiere a una práctica prolongada que proporciona conocimiento o habilidad adquirida por las situaciones vividas. A su vez, la vivencia se define como al hecho de vivir o experimentar algo, o a la experiencia que se tiene de algo. Siguiendo a Rettich (2019), ambas nociones están íntimamente conectadas. De aquí que entendamos a la noción de experiencia anclada a la de vivencia. En este sentido, concebimos a la experiencia como un proceso personal y colectivo. En efecto, se concibe que el significado deviene «del uso situado que se dé al conocimiento y a sus procesos asociados a través de la actividad práctica donde el niño, el joven o el adulto dotan de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales» (Cantoral *et al.*, 2015, p. 16).

Haciendo alusión a esta dimensión pragmática-epistemológica de la experiencia humana, buscamos caracterizar esta noción desde una perspectiva sociocultural para la explicación de la construcción del conocimiento matemático. Al respecto, realizamos los siguientes señalamientos:

- Consideramos que la experiencia no se acota a la vivencia personal de individuos, sino que incorpora además las de los seres humanos como colectivo, como sociedades y como humanidad (Cantoral *et al.*, 2015).
- Un énfasis particular de la experiencia humana es su identificación en ámbitos que hayan sido fundamentales para la humanidad, reconocibles en distintos periodos históricos y entornos culturales (Espinoza, Vergara-Gómez *et al.*, 2020).
- Al posicionar a la experiencia en el ámbito de la sabiduría humana, se enfatiza tanto a lo referente a la habilidad experiencial del uso de conocimientos en situaciones específicas, como a la acumulación de erudición y de tales conocimientos.

Ahora bien, para explorar al saber matemático desde la experiencia humana se requiere realizar distinciones entre las nociones de saber y conocimiento. En esta investigación concebimos al saber en el marco de la vivencia humana con el mundo, mientras el conocimiento es el producto de tal vivencia. En la experiencia se piensa matemáticamente y se vivencia al saber matemático; este último se vuelve conocimiento cuando se transmuta en objetos matemáticos. El saber habita el ámbito del uso, la vivencia y la experiencia del ser humano en el mundo (Cantoral, 2013). El saber es un sistema de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente (Radford, 2013). El saber se vuelve conocimiento al tomar forma de objetos, en los cuales el saber se cristaliza (Espinoza, 2014). En este sentido, el conocimiento es entendido como objetos matemáticos en los que "se manifiesta o actualiza o materializa o encarna el saber" (Radford, 2017, p. 109). Sin embargo, tales objetos no son el saber, sino son una manifestación cristalizada del saber en un tiempo y espacio específico (Espinoza *et al.*, 2018).

Ahora bien, para dar dimensionalidad histórico-cultural a este posicionamiento, Espinoza *et al.* (2018) proponen un modelo para el estudio de la constitución del saber matemático en su devenir histórico-cultural (Figura 1).

> El saber es representado con una flecha curva, la cual, expresa que este no está fragmentado y que se desarrolla de manera transversal a diversos ámbitos de la experiencia humana (Espinoza, 2014). En cambio, el conocimiento es representado con una flecha recta, pues, al transitar a conocimiento, el saber se cristaliza y se vuelve estable (Chevallard, 1991). De esta manera, en su difusión, la naturaleza, organización y estructura del saber se transforman al transitar hacia conocimientos, es decir, hacia objetos susceptibles de ser aprendidos y difundidos (Espinoza, 2014). A su vez, cuando el conocimiento se aprende, es decir, cuando se pone en uso a través de la experiencia, este se vuelve saber (Cantoral, 2013). (Espinoza *et al.*, 2018, p.252).

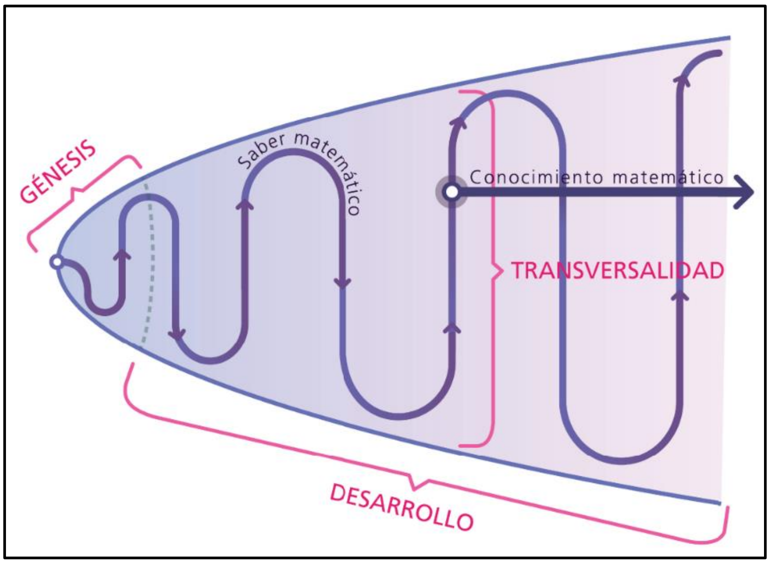

Figura 1. Esquema del modelo teórico para el estudio de la constitución del saber. (Espinoza *et al.*, 2018, p. 252)

Como grupo de investigación, hemos usado este modelo para estudiar la constitución del saber matemático en diversos ámbitos de la experiencia humana. Esto nos ha permitido explorar la génesis y desarrollo del saber matemático desde diversas prácticas humanas fundamentales, "las cuales son ancestrales, permanecen en el tiempo y se expresan en distintos ámbitos culturales" (Espinoza *et al.*, 2018, p. 253). Se ha estudiado, por ejemplo, la construcción social del conocimiento en prácticas de medición (Espinoza *et al.,* 2018), en prácticas científicas ligadas al estudio de fenómenos de percepción visual (Espinoza, Vergara-Gómez *et al.*, 2020) o en prácticas artísticas en las que surgen ideas matemáticas en el contexto del desarrollo de instrumentos musicales (Espinoza y Vergara-Gómez, 2023; Espinoza, Redmond *et al.*, 2020). También, este modelo (Espinoza *et al.*, 2018) se ha usado en investigaciones que han explorado la génesis del estudio de la toma de decisiones en contextos de incertidumbre, el desarrollo del estudio de la resolubilidad de ecuaciones de segundo a quinto grado, o en el uso transversal de ideas matemáticas en el devenir de la teoría electromagnética. Además, las implicancias metodológicas del modelo se han usado en diversas investigaciones que han estudiado, por ejemplo, el uso de la geometría en la astronomía griega antigua, la génesis del cálculo en la ciencia moderna o el desarrollo de la topología en inicios del siglo XX (Cruz-Márquez, 2018, Espinoza, 2009).

De esta experiencia investigativa sostenemos que concebir a la matemática como conocimientos (objetos matemáticos, teoremas, definiciones, etc.) no permite explorar los diversos significados de uso del conocimiento matemático ni la naturaleza del pensamiento matemático en su sentido amplio. Tales significados del saber, anclados a la experiencia humana, hoy se encuentran perdidos, simplificados o invisibilizados en la matemática escolar (Espinoza, Vergara-Gómez *et al.*, 2020). De aquí la necesidad de realizar un viraje epistemológico respecto a nuestra comprensión de qué son las matemáticas. Y para hacer esto se requiere entender al saber matemático desde la experiencia humana en y con el mundo.

3. El problema de estudio y sus consideraciones metodológicas

A continuación, desarrollaremos el argumento de concebir al saber matemático desde la experiencia humana, considerando el caso del uso del conocimiento geométrico en el arte de la edificación de construcciones arquitectónicas de los antiguos griegos. Como método de investigación, realizamos primero un análisis de contenido y análisis contextual de la *Óptica de Euclides,* un tratado geométrico de percepción visual escrito alrededor del siglo III antes de Cristo. Posteriormente, indagamos en los posibles usos de tales proposiciones en problemas relacionados con fenómenos ópticos, asociados a correcciones ópticas en una de las obras arquitectónicas más emblemáticas de la cultura griega antigua: el Partenón de la Acrópolis de Atenas (Figura 2).

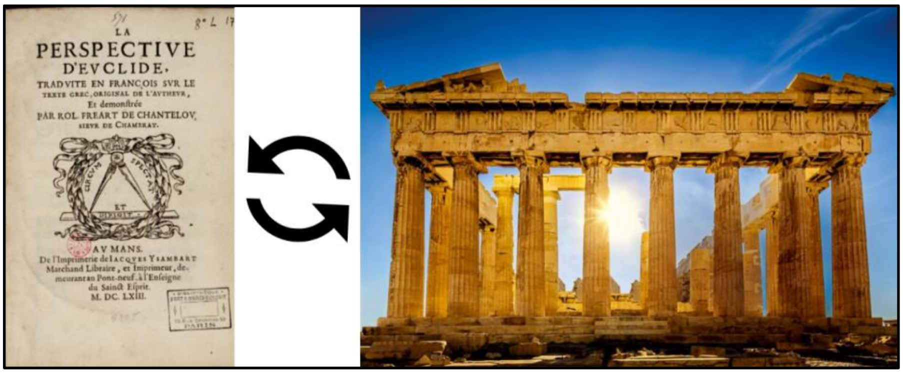

Figura 2. La *Óptica de Euclides* (Chantelou, 1663, p.1) y el Partenón de Atenas (García, 2020).

La *Óptica de Euclides* es un tratado sobre percepción visual datado en el siglo III antes de Cristo. En este tratado la percepción visual es modelada geométricamente a través de rayos visuales que salen del ojo y llegan a los objetos vistos, los cuales definen ángulos de visión. Cabe señalar que tal modelación no considera aspectos referentes al efecto de relieve, color, sombra, grosor u otras variables involucradas en el fenómeno de la visión (Espinoza, Vergara-Gómez *et al*., 2020). En sus 58 proposiciones se estudian diversos fenómenos de percepción visual en los que, ya sea por el movimiento del observador o el objeto visto, se analiza tanto la conservación como el cambio del ángulo de visión.

Por su parte, el *Partenón* es un templo antiguo construido entre los años 447 y 432 antes de Cristo. Está ubicado en el centro de Atenas, la actual capital de Grecia, en la zona arqueológica llamada Acrópolis, y es una de las construcciones más conocidas y connotadas en la cultura griega antigua. Está construida en la parte más alta y visible de la ciudad y la originalidad tras su diseño no tiene precedentes en la arquitectura griega (Sánchez, 1997). Es una de las construcciones griegas mejor conservadas hasta nuestros días, y uno de los edificios más importantes de la antigua Grecia (Kappraff y McClain, 2018). Su importancia, entre otros factores, deviene de las diversas regularidades matemáticas que los arquitectos griegos impregnaron en su construcción, la cual ha sido estudiada por diversos autores (Kappraff, 2006; Tsiambaos, 2009; Doxiadis, 1972).

El establecimiento del vínculo entre las proposiciones de la óptica geométrica de los griegos y su manera de construir edificaciones data desde hace más de un siglo, con los trabajos de arquitectos como Choisy (1899), Le Corbusier (1941) y Dioxadis (1937). Estos autores justifican, por ejemplo, la disposición de los complejos urbanos griegos, a partir de ángulos visuales que favorecen la percepción del observador, en el marco de la *Óptica de Euclides*. Sin embargo, también hay otros autores que cuestionan este vínculo. Es el caso de Tsiambaos (2009) o de Naumann (1938), quienes sitúan las afirmaciones de Doxiadis sólo a un nivel hipotético. Los argumentos de tales autores son que no existen datos precisos para asegurar que la arquitectura griega de ese período se alzara sobre la base de reglas geométricas y que la conceptualización geométrica de la *Óptica de Euclides* es muy posterior al diseño de la Acrópolis Griega. Si bien, compartiremos de la crítica el carácter interpretativo de la suposición, dados los escasos documentos que se preservaron de la época, sostenemos que las obras de Euclides responden a un proceso de sistematización de conocimientos, que recopila y organiza saberes de tiempos y lugares más allá de la Grecia del siglo III a.C. Esto se explica, en gran medida, por la cultura cosmopolita de Alejandría, que propició el desarrollo de obras matemáticas que buscaban recopilar e incorporar todos los conocimientos previos (Forster, 2018). Esta lógica se evidencia palmariamente en la obra Los Elementos de Euclides, la cual reúne ideas matemáticas desarrolladas y registradas varios siglos antes.

Respecto al método de investigación empleado en esta investigación, primero se realizó un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) en el que se estudiaron todas las proposiciones del tratado en la traducción al español, con comentarios, realizada por Ortiz (2000). De este análisis se agruparon las proposiciones por secciones temáticas y se identificaron secciones que eventualmente pudieran estar vinculadas a problemas de percepción visual relativos a la arquitectura antigua. Como resultado de este análisis identificamos las proposiciones 4 a la 17. Después, se realizó un análisis contextual (Espinoza, 2009) del tratado. Al respecto, Espinoza (2009) propone el estudio de obras matemáticas antiguas, considerando los contextos históricos, sociales y culturales en los que fueron producidos. En el análisis se estudió particularmente el rol que tuvo la biblioteca de Alejandría en la sistematización de conocimientos en el siglo III a. de C (Melogno, 2011) así como las diversas teorizaciones de la visión realizada por filósofos anteriores al siglo III. a. de C. (Smith, 1999; Ortiz, 2000).

Posteriormente, con miras en indagar los posibles usos de tales proposiciones en problemas ligados a las características arquitectónicas del Partenón, se realizó un análisis de contenido para comparar e inferir el fenómeno a partir de otros textos (Krippendorff, 2004). Específicamente se revisaron fuentes primarias que analizan la arquitectura griega antigua, entre las cuales se encuentran las siguientes: El capítulo 4 de *Los diez libros de arquitectura* de Vitruvio (1997), *La Perspective d'Euclide* de Chantelou (1663), *An Investigation of the Principles of Athenian Architecture* de Penrose (1888), *The Parthenon: From Antiquity to Present* de Neils (2005) y *Petrus pictor burgensis: De prospectiva pingendi* de Piero della Francesca (1899). Este análisis se realizó en dos etapas. En la primera etapa, buscamos usos explícitos y referencias a las proposiciones de la *Óptica de Euclides* en las fuentes de arquitectura antigua seleccionadas.

En la segunda etapa, indagamos el posible uso de las proposiciones 4 a la 17 de la *Óptica de Euclides* en las correcciones ópticas que realizaron los arquitectos en el Partenón (Sánchez, 1997). Además, este análisis se complementó consultando fuentes secundarias relativas al tema, tales como los estudios de Kappraff (2006), Tsiambaos (2009) y Kappraff y McClain (2018). Habiendo descrito el método investigativo, presentamos a continuación los resultados de la investigación.

4. La visión como experiencia humana y su geometrización

Ver es una experiencia que acompaña la vida humana. Para las personas videntes, ver es un acto constitutivo de lo que significa conocer y percibir el mundo, y de la manera en que conectamos con el entorno. Es una práctica significativa para cada individuo, pero también para el ser humano como especie. En efecto, el conocimiento producido por los humanos tiene directa relación con el cómo experimentamos el mundo, y particularmente la visión ha sido una forma central de interacción que ha derivado en el desarrollo, particularmente, de conocimientos en el ámbito de la ciencia, las técnicas y las artes.

4.1 Modelación geométrica de la percepción visual

Desde la antigüedad se ha estudiado la visión. Los estudios de lo que se denomina óptica geométrica datan de la antigüedad, y el texto más antiguo que ha llegado a nuestros días sobre esta temática es la *Óptica de Euclides*. Este texto es atribuido a la tradición de la óptica geométrica de Alejandría, datada en el siglo III antes de Cristo (Rashed, 1996). En esta obra, se modela geométricamente la percepción visual mediante rayos visuales que salen del ojo y llegan a los objetos vistos (Ortiz, 2000). Euclides representa el ojo como un punto y las magnitudes vistas como segmentos. Por tanto, la magnitud aparente de los objetos vistos por el ojo estará determinada por el ángulo formado por los dos rayos visuales que llegan a los extremos de la magnitud vista (Figura 3).

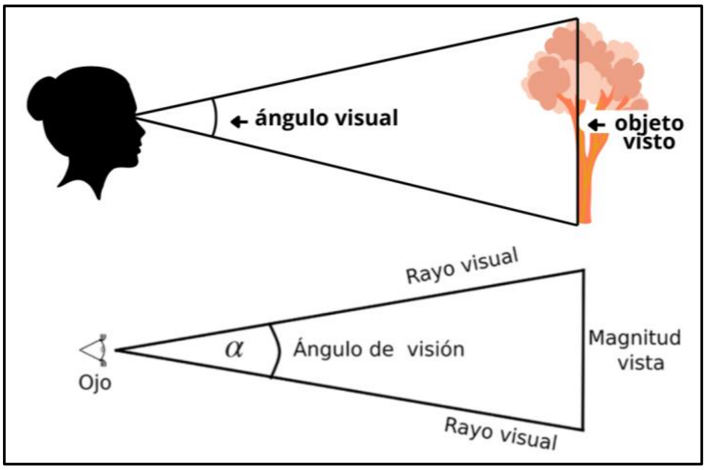

Figura 3. Geometrización de la percepción visual en la *Óptica de Euclides* (Espinoza, Vergara-Gómez *et al.,* 2020, p. 12).

Un aspecto importante a tener en cuenta es que la modelación geométrica de la percepción visual descansa en la experiencia humana de ver. La magnitud de la percepción visual de un observador ante un objeto visto es un ángulo. Desde esta perspectiva, nuestra forma de ver descansa en un ángulo de visión que tienen los objetos sobre lo visto. Esto se modela en un cono, que, llevado al plano, se deriva en un ángulo visual. Esta característica de llevar los fenómenos al plano es característica de los científicos griegos y se apoya, por una parte, en la dificultad de representar objetos de tres dimensiones en un papel, y por otra, en la búsqueda de modelos simples que permitan modelar fenómenos ligados a la experiencia humana con el mundo.

Al ver, existe un significativo fenómeno de percepción visual que consiste en que la magnitud vista es distinta a la de los objetos vistos. La magnitud aparente de objetos suele estar determinada por una distancia del ojo al objeto y el ángulo de percepción visual al objeto. Y este ángulo cambia en función de la posición que tiene el observador en referencia al objeto visto. En esta línea, Aristóteles (384-322) definió a la óptica como la más natural de las ramas de las matemáticas, y añadió que, "mientras que la geometría investiga las líneas, pero no las naturales, la óptica matemática investiga las líneas naturales" (Smith, 1999, p.11). Es decir, a diferencia de la geometría que está en los *Elementos de Euclides*, la geometría que está en la *Óptica de Euclides* describe las relaciones entre los objetos geométricos, en función de lo que percibimos desde nuestros sentidos.

4.2 La *Óptica de Euclides* y el estudio de la percepción visual

Ortiz (2000) señala que, a diferencia de la actualidad, los griegos no estudiaron a la óptica como un fenómeno físico. En efecto, el estudio se realiza siguiendo propiedades y características netamente geométricas. En el comienzo de la *Óptica de Euclides* se incluyen siete definiciones, una de las cuales (definición 4) postula "que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que, bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales" (Euclides, en Ortiz, 2000, p. 137). Con base en estas definiciones, en el libro se desarrollan 58 proposiciones en las que se estudian diversos fenómenos de percepción visual. Por ejemplo, se plantea que "las magnitudes iguales situadas a distancias desiguales parecen desiguales, y parece siempre mayor la que está situada más cerca del ojo" (p. 139). Esta última idea se usa a lo largo de todo el tratado para explicar diversos aspectos de la percepción visual.

En la *Óptica de Euclides* se tratan diversos problemas ligados al estudio del problema real de la percepción visual, pero estos fenómenos visuales se estudian de manera genérica. Hay excepciones, como vagas menciones a ruedas de carros (proposición 36), señalamiento a medición de distancias inaccesibles (proposiciones 18 al 21) y el señalamiento de objetos que se trasladan a cierta velocidad (proposiciones 50, 51 y 54). Sin embargo, de manera general en la *Óptica de Euclides* se estudia la percepción visual sin mencionar contextos específicos de uso del conocimiento. En el presente trabajo, explicamos cómo la geometrización de la experiencia humana de ver mediante ángulos visuales fue usada en el arte arquitectónico de los griegos, el cual hoy sigue siendo admirado por los miles de turistas que visitan Atenas. Nos preguntamos así ¿cómo esta geometrización de la percepción visual fue usada por los constructores y arquitectos griegos del siglo V antes de Cristo?

5. Percepción visual en las correcciones ópticas en el Partenón

En la construcción del Partenón, los arquitectos usaron técnicas de correcciones ópticas que consisten en deformaciones intencionales para superar diversos tipos de efectos ópticos, que se producen al observar grandes construcciones. A continuación, se presentan los resultados del análisis de contenido realizado, referente a los usos de algunas proposiciones de la *Óptica de Euclides* en las correcciones ópticas en el Partenón.

5.1 Deformación de la plataforma del Partenón y la proposición 9 de la *Óptica de Euclides*

El Partenón tiene una plataforma sobre la cual se elevan las columnas del edificio. Esta mide aproximadamente 30,8 metros de ancho y 69,5 metros de largo (Penrose, 1888). A pesar de que esta plataforma se ve como si fuera recta, en realidad está combada hacia arriba en cada uno de los cuatro lados de su plataforma, esto es lo que se conoce como la convexidad del estilóbato, que es el peldaño superior de la plataforma (Figura 4). En los lados más largos del Partenón, esta curva se eleva 11 centímetros, mientras que, en los lados más cortos, esta se eleva 6 ¾ centímetros (Neils, 2005).

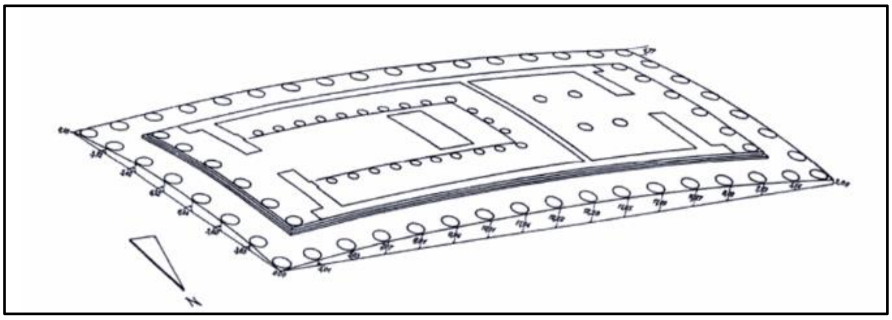

Figura 4. Dibujo a escala de la plataforma del Partenón con curvatura en flancos y fachada (Neils, 2005, p. 120).

Según Neils (2005), esta elevación de la base del Partenón se realizó para evitar una deformación visual que ocurre cuando se miran objetos rectangulares grandes a cierta distancia. Mientras el observador se encuentra más lejos, las esquinas se vuelven más difusas, por lo que no logran distinguirse con claridad. Por este motivo, los objetos rectangulares tienden a verse curvados (Gibson, 1950). De esta manera, si la plataforma del Partenón fuera recta, por el efecto visual, se vería como si estuviera hundido en la parte central. Por tanto, para contrarrestar este efecto visual, los arquitectos realizaron una sutil curvatura en la plataforma del mismo, de modo de evitar la deformación visual y lograr que la base se vea recta.

En el análisis realizado en la *Óptica de Euclides*, encontramos la proposición 9 en la que Euclides plantea lo siguiente: “Las magnitudes rectangulares vistas a distancia parecen redondeadas”. En la traducción de este libro al francés, realizada por Freart de Chantelou en 1663, el traductor comenta en relación a esta proposición lo siguiente:

> Cuando miramos de lejos torres cuadradas, un bastión, una semiluna, un reducto, así como cualquier otra estructura de la arquitectura militar, todas nos parecen redondas. Y la razón de esta extrañeza del ojo se debe a que los ángulos de las extremidades están soportando todas las partes más pequeñas de un cuerpo, también estos comienzan a desaparecer en la distancia [...] y todas las demás partes del mismo cuerpo se suavizan a medida que el ojo se aleja; lo cierto es que el

> resto de la masa aparece como una forma confusa, obtusa y convexa, que es un tipo de redondez[1] (Chantelou, 1663, p.22-23).

En la explicación de su proposición 9, Euclides presenta un rectángulo BR (Figura 5), el cual se considera ubicado a cierta distancia y con elevación. A su vez, añade a la figura un pequeño segmento inclinado ZD ubicado de manera próxima al ángulo del punto R, y agrega otros pequeños segmentos de manera próxima a los otros tres vértices del cuadrado. Luego señala que existe una distancia desde la cual este vértice R no se verá, sino que se verán solamente los puntos D y Z. Con base en lo anterior, considerando el vértice R, plantea que para cada objeto visto existe una distancia en la cual, cuando el observador se sitúa allí, el objeto DZR ya no se ve. Añade que, de manera semejante, esto sucederá con los otros tres vértices de la figura rectangular. En definitiva, concluye que la figura rectangular, mirada a cierta distancia, se verá redondeada.

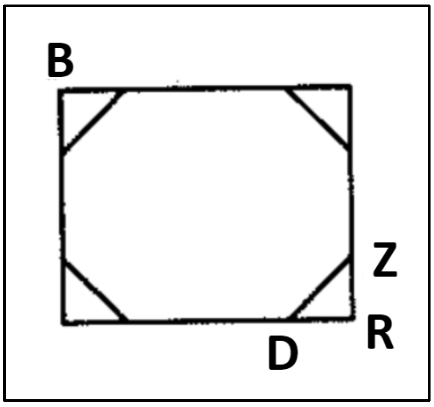

Figura 5. Imagen de la Proposición 9 de la *Óptica de Euclides* (Euclides, en Ortiz, 2000, p. 144).

Chantelou (1663), al comentar esta proposición hace alusión explícita a un efecto visual que ocurría con las construcciones militares de su época. Consideramos que tales construcciones no se realizaban necesariamente con fines estéticos. Por tanto, dado sus grandes dimensiones, se producía este efecto visual descrito por Euclides en su proposición 9. Este es el mismo efecto óptico que los arquitectos de Partenón lograron superar, al decidir curvar la

[1] "nous regardons de loin Tours quarrées, des bastions, des Demi Lunes, des Redoutes et de telles autres structures de lÁrchitecture militaire, tout cela d'abord nous paroist rond: Et la raison de cette suprise de l'oeil est parce que les extremitez des angles estant tousiours les plus petites parties d'un corps, elles commencent aussi les premières à disparoistre dans l'éloignement [...] et toutes les autres parties du mesme corps, s'affaiblissant à mesure qu'elles s'éloignent de l'oeil; il est certain que le reste de la masse paroistra confusément d'une forme obtuse et convexe, qui est une espece de rondeur".

base del mismo. Es decir, se evidencia un vínculo histórico en relación a la aplicación de los saberes que subentiende la proposición 9 de la *Óptica de Euclides* en problemas ligados con la arquitectura antigua.

5.2 Deformación de las columnas del Partenón y la proposición 6 de la *Óptica de Euclides*

Las columnas fueron una característica común en los templos de la antigua Grecia. En un principio eran gruesas, toscas y juntas, y con el tiempo se comienzan a construir más esbeltas, decoradas, estilizadas y separadas unas de otras (Dinsmoor *et al.*, 1973). Los templos se construían sobre gradas de al menos dos metros de altura y los templos más importantes, como el Partenón, eran cubiertos por columnas en sus cuatro lados (Penrose, 1897). Si bien, los templos más antiguos tenían columnas solo en la parte del frente, más tarde se fueron construyendo también con columnas en los costados y en la parte posterior. El Partenón tiene columnas en sus cuatro caras, ocho en las caras frontal y posterior, y diecisiete en las de los costados (Kappraff y McClain, 2018). Estas tienen una altura aproximada de 9,58 metros (Martín, 1996).

En la mayoría de los templos griegos, las columnas se construyeron con un leve ensanchamiento, llamado *éntasis* (Figura 6), que consiste en un ensanchamiento que se realizaba en distintas secciones de las columnas, ya sea en la parte inferior, media o superior, mediante lo cual se subsanaron diversos efectos ópticos (Penrose, 1888). En el caso de las columnas del Partenón, la *éntasis* se realizó de la siguiente manera: se ensanchan levemente, de manera sutil y continua, las columnas desde la base hasta la sección media, dejando que se vean más esbeltas en la parte superior (Niels, 2005). Las columnas del Partenón tuvieron un diámetro inferior de 1,87 metros, mientras que en la parte superior un diámetro de 1,4 metros, aproximadamente (Martín, 1996). A su vez, la separación entre las columnas no es constante, sino que también varía en función del ancho de las columnas.

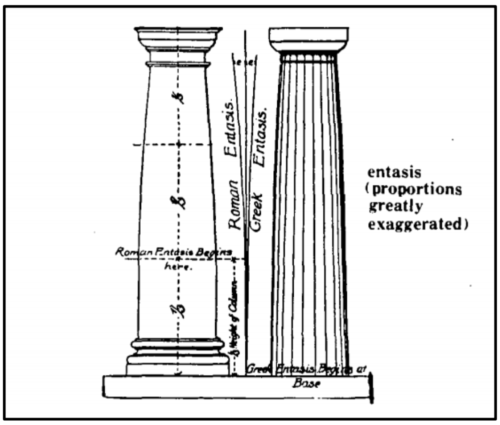

Figura 6. A la derecha, representación de la *éntasis* griega (Martín, 1996, p.5).

En el caso del Partenón, un efecto de percepción visual relacionado con la construcción de las columnas es que, al observar dos de estas, se percibe que la longitud del espacio entre ellas, mientras más alto se mira, va disminuyendo. Una de las formas en que se compensa este efecto óptico es mediante los capiteles de las columnas. El capitel es un ornamento que se dispone en la parte superior de la columna y una de sus funciones es marcar un leve ensanchamiento en la parte superior (*éntasis*), de tal manera de producir un corte en la percepción visual, evitando así la sensación de convergencia entre las columnas.

Por otra parte, al observar de manera frontal varias columnas contiguas, los espacios entre estas tienden a verse desiguales (Figura 7). Si las columnas fueran completamente rectas, se generaría un efecto de concavidad en los espacios situados entre estas. Es decir, las distancias iguales se verían desiguales. Por este motivo, las columnas se construyeron con un leve ensanchamiento en la parte inferior (*éntasis*) y no equidistantes (Neils, 2005). De esta manera las líneas de las columnas sutilmente curvas hacia afuera, tienden a verse rectas y los espacios entre columnas adquieren forma de rectángulos congruentes, corrigiendo así la ilusión óptica.

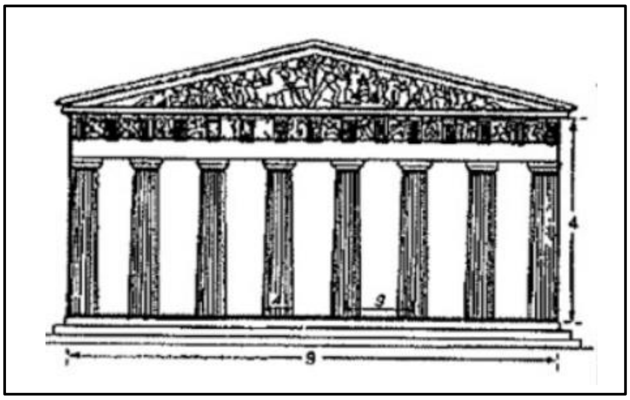

Figura 7. Dibujo de la parte frontal del Partenón (Kappraff y McClain, 2018, p. 91).

La proposición 6 de la *Óptica de Euclides* señala lo siguiente: "*los espacios paralelos vistos desde lejos parecen anisoplatê"* (Euclides, en Ortiz, 2000, p.139). Según el traductor, "anisoplatê tiene dos traducciones posibles: una es "convergentes" y otra es "de anchuras distintas" (Ortiz, 2000). Euclides divide el desarrollo de esta proposición en dos casos: el primero en el que se observa un plano no elevado (justo delante de) y el segundo en el que se observa un plano elevado. En el primer caso, presenta dos rectas paralelas y verticales AB y RD, y un punto E que representará el ojo (Figura 8). Luego, traza rayos visuales EB, EZ, EO, ED, EH y EK, uniendo también las rectas paralelas BD, ZH y OK que se generan entre las rectas verticales. Luego, señala que, dado que el ángulo BED será mayor que el ángulo ZEH, la magnitud BD se percibirá mayor que la magnitud ZH. Asimismo, el ángulo ZEH será mayor que el ángulo OEK, por lo cual la magnitud ZH se percibirá mayor que la magnitud OK. De esta manera, concluye que BD se percibe mayor que ZH, y ZH mayor que OK.

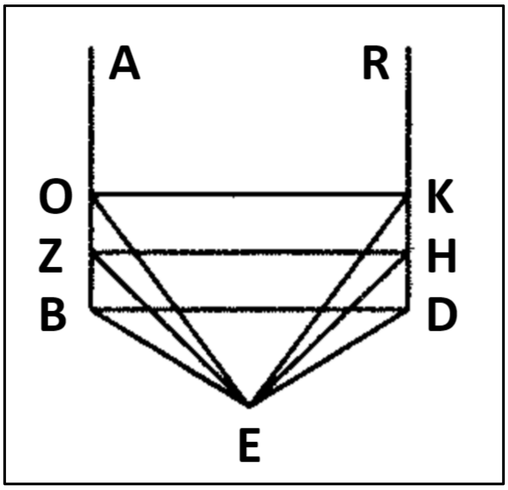

Figura 8. Imagen del primer caso de la Proposición 6 de la *Óptica de Euclides*, reconstruida con alfabeto latino (Euclides, en Ortiz, 2000, p. 140).

En el segundo caso, identifica las dos rectas paralelas ZH y OK con un plano, desde el cual traza una perpendicular al punto A y las rectas GE, KN y OM (Figura 9). Desde la base de este plano, traza una recta auxiliar perpendicular a este, ubicando el punto de visión A. A partir de este punto marca los rayos visuales hacia los puntos G, P, E, K, H, N, O, Q y M. Luego, señala que los triángulos APE y AHN son triángulos rectángulos, y que, dado que la longitud AH es mayor que la longitud AP, luego el ángulo HAN es menor que el ángulo PAE, por lo cual, el segmento HN parecerá ser de menor longitud que el segmento PE. Euclides señala que de manera similar pasará con la percepción de las longitudes GP y KH, de manera que todo GE se verá mayor que KN. Así, estas magnitudes se verán de anchuras distintas.

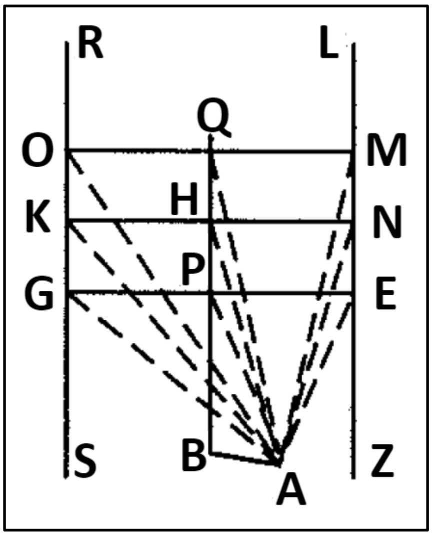

Figura 9. Imagen del segundo caso de la Proposición 6 de la *Óptica de Euclides*, reconstruida con alfabeto latino (Euclides, en Ortiz, 2000, p. 141)

Así, tanto la primera como la segunda parte de la proposición 6 de la *Óptica de Euclides* están vinculadas con la construcción de las columnas del Partenón. Si estas columnas estuvieran construidas de manera recta, el observador percibiría que el espacio entre estas iría decreciendo desde la base hasta el término, distorsionando la visión del conjunto de columnas y sus separaciones. En efecto, los espacios paralelos vistos desde lejos parecen de anchuras distintas, las que van disminuyendo a mayor distancia. Por tanto, para superar este efecto óptico, las columnas son levemente ensanchadas en la parte inferior y se hacen más esbeltas hacia la parte superior, de manera que el espacio entre las columnas sea menor en la parte inferior y mayor en la parte superior. Así, se contrarresta el efecto visual y se da una apariencia rectangular a los espacios entre las columnas.

En definitiva, ambos ejemplos evidencian el uso de la geometría de la *Óptica de Euclides* en el estudio de problemas de arquitectura antigua. Dada la coherencia del uso de las proposiciones de la *Óptica de Euclides* para explicar las deformaciones del Partenón, señalamos que es plausible sostener, respecto a la *génesis* del saber, que algunos teoremas de este tratado pudieron surgir en el contexto de la labor de los arquitectos griegos que vivieron antes del siglo IV antes de Cristo.

6. Otros elementos de la percepción visual: la Acrópolis de Atenas

Al analizar la posición de los templos y edificaciones en la Acrópolis de Atenas, es posible notar que las prácticas de la arquitectura de aquella época manifiestan saberes, cuya naturaleza supera el mero rol técnico-teórico que adquieren en una etapa posterior de disciplinarización. Algunos estudios arquitectónicos, que analizan la distribución geométrica de los templos griegos antiguos, sostienen que la disposición de los edificios de la acrópolis no fue accidental, sino basada en un plan preciso de regulación matemática vinculada con la perspectiva visual (Doxiadis, 1937; Le Corbusier, 1941).

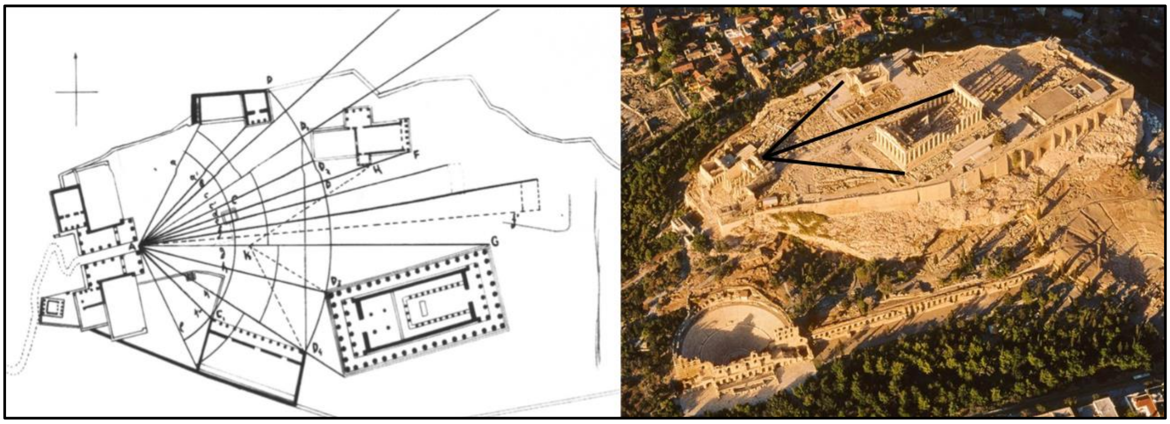

Figura 10. Mapa de la distribución de las construcciones en la Tesis Doctoral de Doxiadis (1937) (Archivo de Constantinos A. Doxiadis; «Derechos de autor de la Fundación Constantinos y Emma Doxiadis») y en una foto actual de la Acrópolis (García, 2020)

La Acrópolis es un recinto ubicado en altura, el cual tiene en la entrada una pequeña edificación llamada Los Propileos. Esta corresponde a un pasillo que, al atravesarse, define una panorámica visual (Punto A) que permite ver las edificaciones del recinto a primera vista (Figura 10). En la Acrópolis la primera construcción que se realizó fue el Erecteión, después del cual fue construido el Partenón[2]. Si lo vemos en el sentido de los rayos visuales de Euclides veremos que el ángulo con el que se ve el partenón es 30º. Luego, el ángulo entre el punto donde termina el Partenón y la esquina donde comienza el Erecteión (Punto D) (a la izquierda del Partenón), también es 30º. Es decir, la posición en la que se construyeron estas edificaciones, respecto del primer punto de visión desde Los Propileos, permitiría ver con "igual amplitud visual" el Partenón que el Erecteión, lo que le da un sentido estético que

[2] Este fue construído sobre la base de un templo anterior que estaba en la misma ubicación. Por tanto este cálculo debió hacerce con anterioridad.

asombra al espectador. Doxiadis (1972) nos recuerda que en la cosmología griega se dividía el firmamento en 12 partes iguales (12 signos zodiacales), y si dividimos la circunferencia en 12 nos da una unidad de 30º[3], lo que significa para el autor una relación no sólo de la arquitectura con la matemática, sino también con su cosmovisión metafísica.

Esta disposición arquitectónica, pensada especialmente para el observador, genera el efecto visual de percibir la completitud de las obras, de modo que el tamaño aparente se percibe igual. Algunos algunos arquitectos del siglo XX refutan esta tesis argumentando que dicha interpretación, que conecta la visión con la óptica geométrica, corresponde a los tiempos helenísticos y no al período clásico que alberga la construcción de la Acrópolis (Tsiambaos, 2009). Sin embargo, no es difícil notar, por todo lo anteriormente expuesto en este artículo, que existen varios ejemplos para sostener que los conocimientos de la óptica geométrica de la Grecia helenística no tienen su origen en el apogeo de Alejandría, sino que responden a un proceso de desarrollo y disciplinarización, cuyos saberes se remontan a prácticas más antiguas.

La proposición 45 de la *Óptica de Euclides* señala: "existe un lugar común desde el cual las magnitudes desiguales parecen iguales" (Euclides, en Ortiz, 2000, p.186). Euclides parte de considerar dos objetos, representados como segmentos, que tienen tamaños distintos BT y TA. Luego, a partir de estos segmentos, realiza una construcción geométrica para hallar un "lugar común", representado por un punto Z. La demostración de la existencia de este punto se realiza desde un caso específico, donde las longitudes son contiguas y colineales, pero es extensible a otros casos, donde las longitudes desiguales sean perpendiculares contiguas (Chantelou, 1663) u oblicuas contiguas.

El proceso consiste en construir un arco de circunferencia, mayor que una semicircunferencia, en torno a la longitud mayor BT, para luego construir un arco semejante en torno a la longitud menor TA (Figura 11). Estos arcos se cortan mutuamente en el punto buscado Z. Desde Z se trazan los segmentos ZB, ZT y ZA. Así, con base en la definición 4 (los objetos vistos bajo ángulos iguales parecen iguales) y dado que los ángulos inscritos en arcos semejantes son iguales entre sí, los ángulos de las secciones BZT y TZA son iguales entre sí. Esto justifica que desde el ojo situado en el punto Z, BT y TA se ven iguales, aunque son distintos.

[3] Def. 4. (longitudes diferentes se ven iguales si son vistas bajo ángulos iguales.

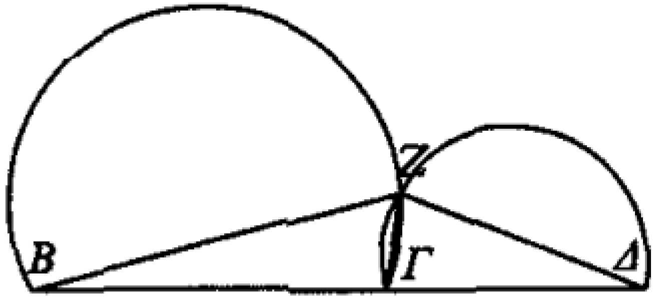

Figura 11. Imagen de la Proposición 45 de la *Óptica de Euclides*, reconstruida con alfabeto latino (Euclides, en Ortiz, 2000, p. 186)

Dicho lo anterior, es posible interpretar que la proposición 45 de la *Óptica de Euclides* está vinculada con una configuración arquitectónica, que orienta la mirada del observador, favoreciendo una impresión armoniosa de las edificaciones de la Acrópolis. La ubicación cuidadosa de la salida del pasillo de los Propileos asegura la igualdad de los ángulos de visión, promoviendo sutilmente un equilibrio entre los tamaños aparentes, lo que se traduce en una experiencia estética de percepción visual.

Por último, el vínculo de la geometría de Euclides se puede establecer con otras construcciones antiguas. Es el caso de los teatros griegos, como por ejemplo el *Odeón de Herodes Ático*, situado en la ladera suroeste de la Acrópolis de Atenas. Así como en otros teatros griegos, en este las gradas se distribuyen en forma semicircular o en un arco mayor a un semicírculo. En Espinoza, Vergara-Gómez *et al.* (2020), al estudiar el uso del teorema del ángulo inscrito en la *Óptica de Euclides*, se evidencia que el movimiento circular mantiene invariante la magnitud de la percepción visual. En tal investigación se propone un diseño didáctico para trabajar con estudiantes el estudio de la conservación y el cambio de la percepción visual, mediante el uso del teorema del ángulo inscrito.

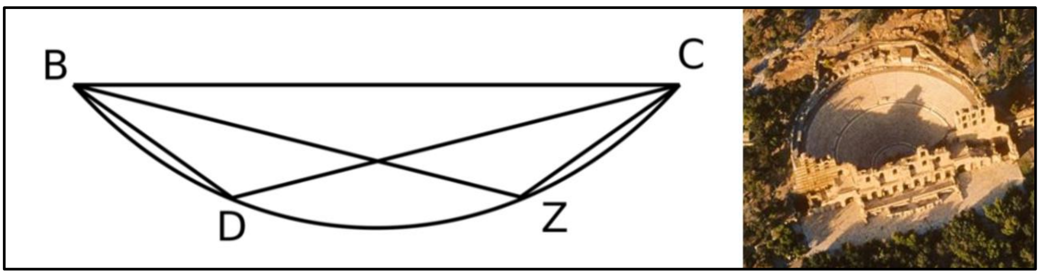

Figura 12. Representación de la proposición 38 en la Óptica de Euclides (Euclides, en Ortiz, 2000, p. 177) y fotografía del teatro Odeón de Herodes Ático de la Acrópolis (García, 2020).

La forma circular de la ubicación de las gradas del *Odeón de Herodes Ático* u otros teatros griegos puede ser utilizada para discutir el vínculo entre ciertos teoremas geométricos presentes en la obra de Euclides y la expresión cultural de la experiencia humana. Particularmente la proposición 38 de la *Óptica de Euclides* señala que "hay un lugar en el cual, si el ojo cambia de posición y el objeto visto permanece fijo, el objeto visto parece siempre igual" (Euclides, 2000, p. 177). El lugar geométrico que determina esta proposición está formado por los puntos sobre los cuales se conserva el ángulo de visión, lo cual representa justamente un arco de circunferencia (Figura 12). Proponemos que es posible relacionar la forma en la que se han distribuído las gradas de los teatros con esta proposición de la *Óptica*, de modo que la disposición de las filas de gradas en arco de circunferencia se relaciona con la búsqueda de conservación de la percepción visual del escenario del teatro.

En conclusión, teniendo en consideración que la construcción de teatros griegos estuvo vinculada con actividades de carácter artístico y, particularmente, con la apreciación visual del espectador, proponemos que es posible problematizar la forma circular de construcción de las gradas apoyado en elementos de la conservación de la percepción visual presentes en la Ó*ptica de Euclides*.

7. Acerca de la constitución del saber matemático

Este estudio hace surgir interrogantes respecto a la génesis y el desarrollo del saber tras las proposiciones geométricas de la *Óptica de Euclides,* en la práctica de la arquitectura antigua. Tomando en cuenta que la *Óptica de Euclides* se escribió entre cien y ciento cincuenta años después de la construcción del *Partenón de Atenas*, cabe preguntarse en qué medida las proposiciones de la *Óptica* tienen relación con la arquitectura helénica. A su vez, ¿pudieron los arquitectos helénicos realizar estas correcciones ópticas en la edificación del Partenón con ese grado de exactitud sin problematizar los fenómenos de efectos ópticos propios de la experiencia humana de ver?

Siguiendo el modelo teórico, la *Óptica de Euclides*, así como los *Elementos de Euclides* y otros tratados geométricos de la época, son conocimientos matemáticos. Es decir, son una manifestación, una materialización, una encarnación del saber matemático (Radford, 2017). Son una manifestación cristalizada del saber matemático (Espinoza *et al.*, 2018) producida en el siglo III antes de Cristo bajo circunstancias específicas. Y parte de estas circunstancias es el contexto geopolítico en el que son producidas estas obras, esto es, un periodo de expansión territorial y cultural del recién establecido imperio griego. Después de establecida la conquista y unificación de territorios, los griegos fundan la ciudad de Alejandría, junto con su Museo y Biblioteca, donde se lleva a cabo un proceso de sistematización de conocimientos del imperio de la época. Entre tales sistematizaciones de conocimientos encontramos a la *Óptica de Euclides*.

De esta manera, los saberes de los *Elementos de Euclides*, la *Óptica de Euclides* y otros tratados escritos en este periodo son sistematizaciones de conocimientos, algunos de los cuales datan de siglos o incluso milenios antes (Figura 13). Ejemplo de esto en el caso de la *Óptica de Euclides* son, por ejemplo, las proposiciones de la 17 a la 21 (Espinoza *et al.*, 2018). En este sentido, ¿qué podemos decir acerca de las proposiciones 6 y 9? ¿Habrán sabido de las ideas tras tales proposiciones en la época de la construcción del Partenón? En el modelo teórico, abordar esta pregunta se refiere a preguntarse en torno a cuáles son los saberes desde los cuales devienen los conocimientos matemáticos presentes en las proposiciones 6 y 9. Y como ya hemos señalado, el saber está arraigado a la experiencia humana. Este vive, se adquiere y se reconoce en la vivencia del ser humano en el mundo.

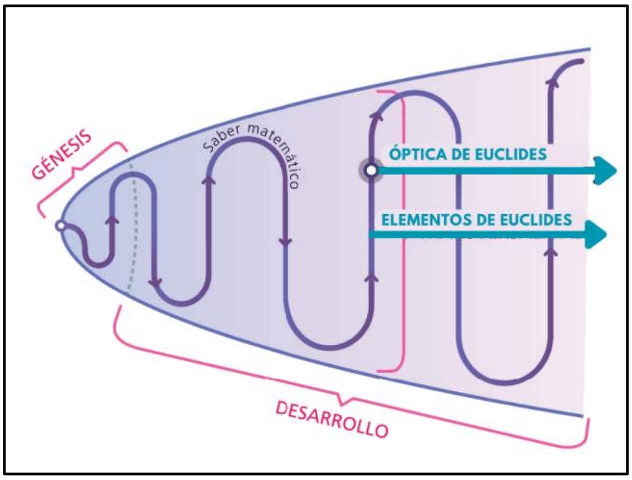

Figura 13. La *Óptica de Euclides* y los *Elementos de Euclides* representados en el modelo teórico de la constitución del saber matemático

La exactitud y precisión de las correcciones Ópticas presentes en el Partenón nos da indicios para sostener que los arquitectos tuvieron que problematizar de alguna manera los efectos ópticos propios de la experiencia humana de ver. Asumiendo que desde la práctica de la arquitectura helénica sí se problematiza el fenómeno de la percepción visual, cabe preguntarse

¿cómo lo hicieron? ¿Lo habrán hecho a través de la modelación de la percepción visual mediante ángulos visuales? La escasa sobrevivencia de textos testimoniales de la época pone grandes dificultades para resolver este tipo de cuestionamientos. Sin embargo, existe evidencia de la modelación de la visión mediante rayos visuales antes de Euclides.

Es el caso de Platón (427-347), quién, como señala Martínez (2002), plantea una hipótesis sobre las causas de la visión en la que incluye la postura de que la visión está producida por rayos emitidos por el ojo hacia los objetos vistos. La idea de los rayos emitidos por los ojos hace alusión a la teoría extramisionista de la visión sostenida por Empédocles (493-433). A su vez, Barbero (2013) señala que, para explicar la visión, Aristóteles tuvo que aplicar el concepto de rayo visual, la cual, tomó prestada de fuentes más antiguas probablemente ligadas a los pitagóricos. Considerando que el *Partenón* se construyó entre los años 447 y 432 antes de Cristo, podemos sostener que existe evidencia que puede sostener la plausibilidad de la explicación de la visión mediante rayos visuales antes del periodo helénico. Y si a este argumento se agrega que la misma experiencia humana de ver es naturalmente angular, se fortalece más la tesis de que los arquitectos griegos pudieran manejar nociones para modelar geométricamente el fenómeno de la percepción visual.

En síntesis, respecto a los procesos de constitución del saber matemático tras la óptica geométrica, sostenemos que una posible génesis se puede apreciar en la práctica de la arquitectura clásica, mientras que su desarrollo se puede comprender mejor en los procesos de disciplinarización en la Grecia helénica de Alejandría. En la génesis prima el sentido experiencial de la práctica; en el desarrollo, el saber se cristaliza en las obras matemáticas, tales como los trabajos de Euclides. Así, el desarrollo en el tiempo da curso a momentos de disciplinarización, escolarización y circulación, de modo que el saber deviene en discursos de sistematización científica (Espinoza *et al.*, 2018). De esta forma, los saberes de la óptica geométrica no están enraizados en una época, sino que responden a prácticas anteriores a lo helénico, existiendo correspondencia entre la sistematización de tales saberes y el talante experiencial de la actividad humana.

8. Conclusión

En la presente investigación hemos sostenido el planteamiento teórico que concibe a la experiencia humana como la fuente y el sustento epistemológico del saber matemático. Recientes investigaciones han dado cuenta de cómo en la antigüedad la geometría surge y se desarrolla ligada a diversas actividades prácticas, entre las cuales se pueden mencionar el comercio, la economía, la astronomía, la medición y la teorización de la música (Scriba y Schreiber, 2015; Cruz-Márquez, 2018; Espinoza *et al.,* 2018, 2020; Van Wymeersch, 2008). En esta investigación hemos abordado el surgimiento, uso y desarrollo de la geometría en el ámbito de la edificación de templos antiguos, particularmente el uso de la geometría para el estudio de diversos efectos ópticos de percepción visual en el arte arquitectónico plasmado en el Partenón de Atenas.

Hemos explorado cómo la experiencia humana juega un rol fundamental en la forma de modelar geométricamente la percepción visual. También, hemos dado cuenta del uso de esta geometrización, que surge desde la experiencia, para explicar diversos efectos ópticos que se producen al observar edificaciones arquitectónicas antiguas griegas. Interpretamos específicamente una relación entre dos casos emblemáticos que vinculan las proposiciones 6 y 9 de la *Óptica de Euclides* con correcciones ópticas realizadas en la edificación del Partenón de Atenas. Además, considerando la crítica que Tsiambaos (2009) o Naumann (1938) realizan a la investigación de Constantinos Doxiadis, respecto a la diferencia de años entre la construcción de las edificaciones de la Acrópolis y la producción de la Óptica de Euclides, hemos sustentado diversos argumentos que señalan por qué es pertinente establecer el vínculo entre la geometría de Euclides y las construcciones arquitectónicas estudiadas.

En definitiva, posicionamos a la experiencia humana como sustento para concebir y estudiar la creación y difusión de conocimientos matemáticos gestados, compartidos y acumulados por la humanidad. Así, se concibe a la vivencia del ser humano con el mundo como fuente y sustento del saber matemático. En definitiva, concebimos que el saber matemático emerge desde la experiencia del ser humano como individuos, colectivos y sociedades en permanente interacción. Esto en términos teóricos y prácticos plantea un viraje epistemológico de dimensión paradigmática, pues ya no es la abstracción o la centración en el objeto la que da sustento a nuestra comprensión de qué es la matemática, sino la experiencia que tiene el ser humano con el mundo.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, 85-101. Obtenido de https://rieoei.org/RIE/article/view/75

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 19-48. https://doi.org/10.12802/relime.13.1811

Barbero, S. (2013). Los defectos ópticos de la visión explicados por Aristóteles. *Asclepio*, 65(1), 005, http://dx.doi.org/10.3989/asclepio.2013.05.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas* [Tesis Doctoral no publicada]. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. Editorial Gedisa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education 50*, 77–89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. http://doi.org/10.12802/relime.13.1810

Chantelou, F. (1663). *La perspective d'Euclide.* Imprimerie de Jacques Ysambart Marchand Libraire.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado.* Aique Grupo Editor.

Choisy, A. (1899). *Histoire de l'architecture.* G. Béranger.

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* [Tesis de Maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática. Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*. Editora Ática.

Della Francesca, P. (1899). *Petrus pictor burgensis: De prospectiva pingendi* (C. Winterberg, Trad.). JH Ed. Heitz. (Obra original publicada en 1470-1480).

Dinsmoor, W., Aanderson, W. y Spiers, R. (1973). *The architecture of ancient Greece: an account of its historic development.* Biblo & Tannen Publishers.

Doxiadis, C. A. (1972). *Architectural Space in Ancient Greece.* The MIT Press.

Doxiadis, K.A. (1937). *Raumordnung in Griechischen Städtebau. Dissertation zur Erlangung der Würde eines* [Doktor-Ingenieurs der Technischen Hochschule Berlin]. Heidelberg-Berlin: Kurt Vowinckel Verlag.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico* [Tesis de Maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses* [Tesis de Doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses* [Tesis doctoral no publicada]. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F, México.

Espinoza, L., Vergara-Gómez, A., y Valenzuela-Zúñiga, D. (2020). Contextualización en matemáticas: uso del teorema del ángulo inscrito en la geometrización de la percepción visual. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 38*(1), 5-26. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2418

Espinoza, L., Redmond, J., Palacios, P., y Cortéz, I. (2020). Numerus surdus y armonía musical. Sobre el temperamento igual y el fin del reinado pitagórico de los números. *Revista de Humanidades de Valparaíso, 16*, 137-167. https://doi.org/10.22370/rhv2020iss16pp137-167.

Espinoza, L., Vergara-Gómez, A., y Valenzuela, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Espinoza, L., y Vergara-Gómez, A. (2019). La teoría socioepistemológica, la teoría antropológica de lo didáctico y el problema de la constitución del saber. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *21*(4), 357-369. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p357-369

Espinoza, L., y Vergara-Gómez A. (2023). Enseñanza interdisciplinaria Música-Matemática: la guitarra y su rol protagónico en el desarrollo histórico de la música occidental. *Revista Latinoamericana de Investigaación en Matemática Educativa 26*(1), 13 - 46. https://doi.org/10.12802/relime.23.2611.

Euclides (2000). La Óptica de Euclides. (Trad. Ortiz, P.). En Curbera, J. (Ed), *Aristóteles: sobre las líneas indivisibles. Mecánica. Euclides: Óptica. Catóptrica. Fenómenos* (pp.117-197). Editorial Gredos SA.

Forster, E.M. (2018). *Alexandria: A History and a Guide.* Project Gutenberg.

Freire, P. (1971). *Astutos e inocentes. Concientização: teoría y prática da libertação. Uma introdução ao pensamento de Paulo Freire*. Cortez & Moraes.

García, C. (08 de junio de 2020). *El Partenón.* National Geographic. https://historia.nationalgeographic.com.es/a/partenon_8141

Gibson, J. J. (1950). *The perception of the visual world.* Houghton Mifflin.

Kahneman, D. (2003). A perspective on judgment and choice: Mapping bounded rationality. *American Psychologist, 58*(9), 697-720. https://doi.org/10.1037/0003-066X.58.9.697

Kappraff, J. (2006). Anne Bulckens' Analysis of the Proportions of the Parthenon and its Meanings. *Symmetry: Culture and Science, 17*(1-2), 91-96. Recuperado de https://journal-scs.symmetry.hu/issue-content/?volume=17&issue=1-2

Kappraff, J. y Mcclain, E. (2018). The proportional system of the Parthenon and its connections with vedic India. En Carr, B. y Dumbrill, R. (Eds.) Music and deep memory (pp. 81-90). Iconea Publications London.

Krippendorff, K. (2004). Content analysis: An introduction to its methodology. Sage publications.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). Where mathematics comes from. Basic Books.

Le Corbusier (1941). Sur les quatre routes. Gallimard.

Martín, C. (1996). Estudio arquitectónico y estructural de la éntasis de los templos griegos: de un principio mecánico a un principio artístico (Tesis de Doctorado no publicada). Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Madrid, España.

Martínez, R. (2002). Del ojo. Ciencia y Representación. Ciencias, 66, 46-57.

Melogno, P. (2011). Los Elementos de Euclides y el desarrollo de la matemática griega. En Melogno, P., Rodríguez, P. y Fernández, M.S. (Eds.). Elementos de historia de la ciencia (pp. 61-80). Universidad de la República.

Montiel, G. y Jacomé, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. Boletim de Educação Matemática, 28(50), 1193-1216. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Naumann, R. (1938). Philologische Wochenschrift, n. 44 (29th October), pp. 1228–1236.

Neils, J. (2005). The Parthenon: From Antiquity to Present. Cambridge University Press.

OECD (2019). Assessment and Analytical Framework PISA 2018, PISA. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

Ortiz, P. (2000). Introducción. En Ortiz, P. (ed.), *Aristóteles, sobre las líneas indivisibles, mecánica. Euclides, óptica, catóptrica, fenómenos* (pp. 119-134). Editorial Gredos.

Penrose, F. (1888). *An Investigation of the Principles of Athenian Architecture.* Macmillan & Co.

Penrose, F. (1897). On the orientation of certain Greek temples and the dates of their foundation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, *190*, 43-65. https://doi.org/10.1098/rsta.1897.0014

Radford, L. (2006). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral Uriza, O. Covián Chávez, R. M.

Farfán, J. Lezama Andalón, y A. Romo Vázquez (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 669-689). Diaz de Santos.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of research in mathematics education, 2*(1), 7-44. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 97-114). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rashed, R. (2019). Geometrical optics. In R. Rashed (Ed.), *Encyclopedia of the history of Arabic science* (pp. 618-646). Routledge.

Rettich, J. (2019). *Enseñanza Universitaria: afectaciones desde la noción de experiencia. El estudio de las prácticas pre-profesionales en ámbitos de trabajo con la comunidad* [Tesis de Maestría, Universidad de la República (Uruguay)]. https://www.cse.udelar.edu.uy/wp-content/uploads/2020/02/tesis-J-Rettich-1.pdf

Sánchez, C. (1997). El Partenón y el programa constructivo de Pericles. En Domíngez, A. y Sánchez, C. (Eds.) *Arte y poder en el mundo antiguo* (pp. 127-160). Ediciones Clásicas.

Scriba, C. J., y Schreiber, P. (2015). *5000 years of geometry, mathematics in history and culture*. Springer Basel.

Smith, M. (1999). *Ptolemy and the Foundations of Ancient Mathematical Optics: A Source Based guided study.* American Philosophical society.

Soto, D., y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1525-1544. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Tsiambaos, K. (2009). The Creative Gaze: Doxiadis' discovery. *The Journal of Architecture*, *14*(2), 255-275. https://doi.org/10.1080/13602360902867574

Van Wymeersch, B. (2008). Qu'entend-on par «nombre sourd»? En Philippe Vendrix (ed.), *Music and Mathematics* (pp. 97-110). Brepols Publishers.

Vitruvio, M. (1997). *Los diez libros de arquitectura.* Editorial Iberia.